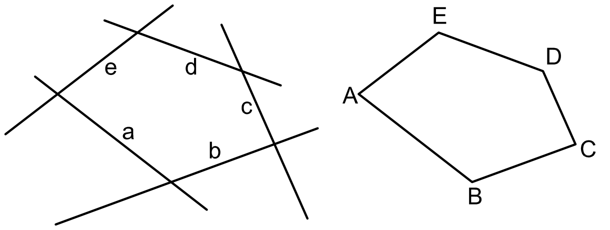
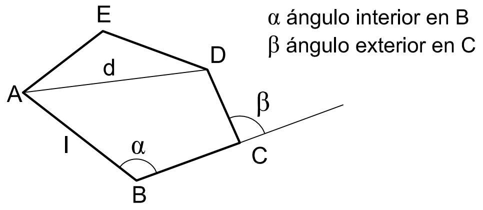
POLÍGONOS

1. DEFINICIÓN, ELEMENTOS, CLASIFICACIÓN Y PROPIEDADES

Un polígono es una figura plana formada por rectas que se cortan dos a dos. Es también la región del plano limitada por una linea poligonal cerrada (D.1).



D.1



D.2

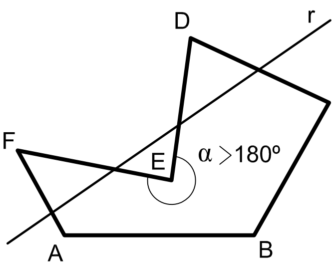
1.1. Elementos de un polígono (D.2).

- Lado (*l*): cada segmento de la polilínea.
- Vértice (*A*): extremo de cada lado.
- Ángulo interior (α): el que forman en cada vértice dos lados consecutivos.
- Ángulo exterior (β): el que forman en cada vértice un lado con la prolongación del lado contiguo.
- Diagonal (*d*): segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Perímetro: suma de las longitudes de todos los lados.

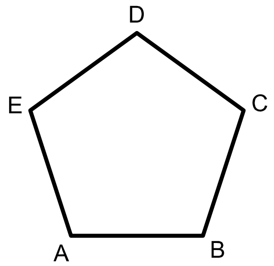
Un polígono de *n* lados tiene *n* vértices y *n* ángulos.

1.2. Clasificación.

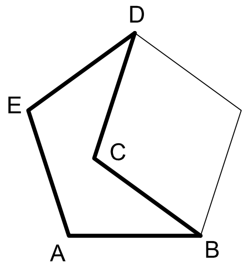
- Por el número de lados: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono, undecácono, dodecágono, etc.
- Por sus ángulos:
  - Polígonos convexos: todos los ángulos interiores del polígono son menores de 180º.
  - Polígonos cóncavos: alguno de sus ángulos interiores es mayor de 180º. Además, hay rectas secantes que lo cortan en más de dos puntos (D.3).



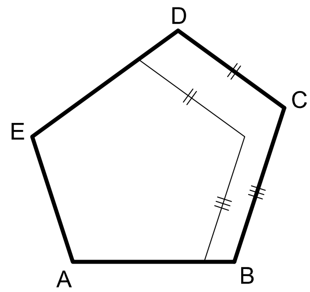
D.3



D.4

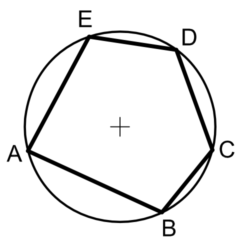


D.5

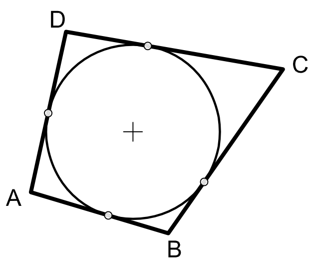


D.6

- Por la igualdad de lados y ángulos:
  - Polígono regular: lados y ángulos iguales (D.4).
  - Polígono equilátero: todos los lados miden los mismo (D.5).
  - Polígono equiángulo: todos los ángulos miden lo mismo (D.65).
- Según esté circunscrito o inscrito en una circunferencia.
  - Polígono inscrito: todos sus vértices están contenidos en una circunferencia (D.7).
  - Polígono circunscrito: todos los lados son tangentes a una circunferencia (D.8).



D.7

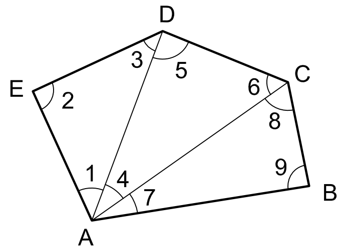


D.8

1.3. Propiedades.

1) La suma de los ángulos interiores de un polígono es 180º·*(n-2)*.

Descomponiendo por triangulación un polígono de *n* lados, obtenemos siempre *n-2* triángulos cuyos ángulos suman 180º.



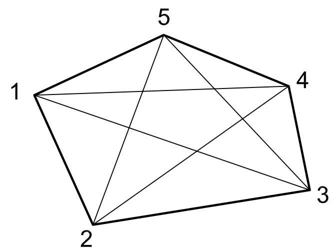
D.9

2) La suma de los ángulos exteriores de un polígono es siempre 360º.

Si en cada vértice el ángulo interior y exterior suman 180º, y la suma de los interiores es 180º·(*n*-2), despejando, la suma de los exteriores será:

$$180º \cdot n - 180º \cdot (n-2) = 360º$$

3) El número de diagonales de un polígono es siempre $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$



D.10

De cada uno de los *n* vértices de un polígono podremos trazar *n*-3 diagonales a los restantes vértices (descartamos el propio vértice y los dos consecutivos). Pero esta cantidad habrá que dividirla entre dos para no contar dos veces cada diagonal.

Así, en un pentágono hay $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} =$ 5 diagonales

2. POLÍGONOS REGULARES

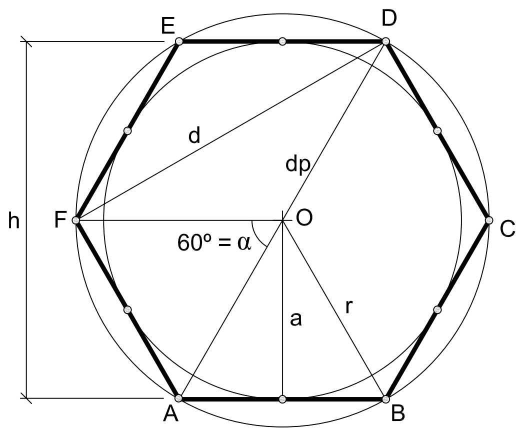
Son polígonos convexos, equiláteros, equiángulos, inscritos y circunscritos a la vez.

El valor del ángulo interior es $\frac{180º \cdot (n-2)}{n}$, y el del exterior $\frac{360º}{n}$

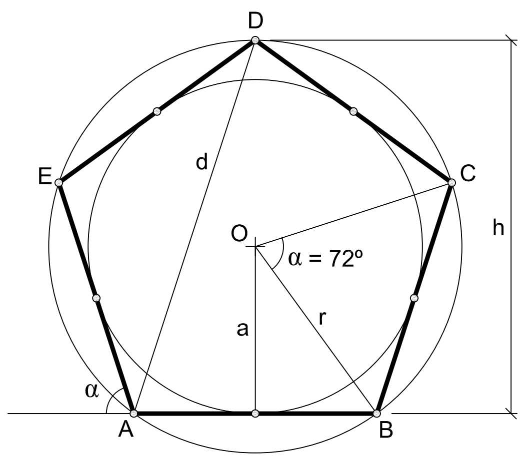
Así por ejemplo, el ángulo interior de un pentágono es de 108º, y el exterior de 72º.

2.1. Elementos (D.11 y 12).

- Centro (*O*): centro de la circunferencia inscrita y circunscrita al polígono.
- Radio (*r*): segmento que une el centro con cualquier vértice. Es el radio de la circunferencia circunscrita.
- Apotema (*a*): segmento que une el centro con el punto medio de un lado. Es el radio de la circunferencia inscrita.
- Altura (*h*). Distinguimos:
  - En un polígono de *n* par lados, es la distancia entre dos lados opuestos.
  - En un polígono de *n* impar lados, es la distancia de un vértice al punto medio del lado opuesto.
- Diagonal (*d*): segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Diagonal principal (*dp*): Es la que une dos vértices opuestos (por tanto, solo en polígonos de *n* par lados).
- Ángulo central (α): El vértice es el centro y sus lados son dos radios a vértices consecutivos. Coincide con el ángulo exterior del polígono.



D.11. Polígono de *n* par lados (hexágono)

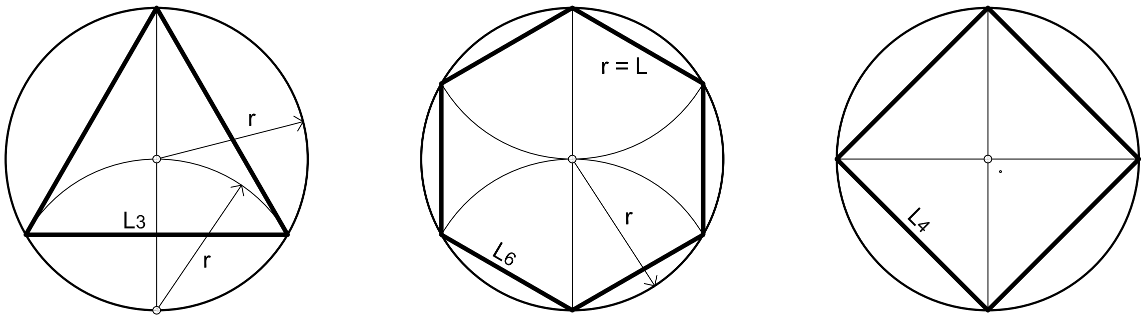


D.12. Polígono de *n* impar lados (pentágono)

2.2. Construcción de polígonos regulares.

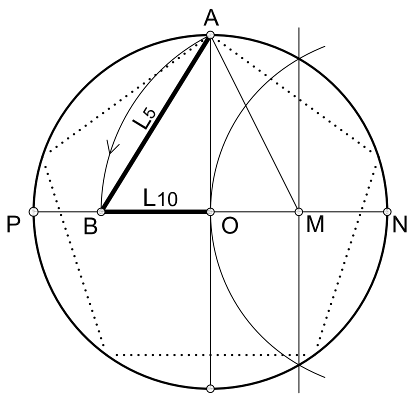
2.2.1. Construcción de polígonos regulares conociendo el radio.

Equivale a inscribir un polígono regular de *n* lados en una circunferencia, o a dividir una circunferencia en un número determinado de partes iguales. Recordamos la construcción del **triángulo equilátero**, del **hexágono** (polígono regular cuyo radio coincide con el lado) y del **cuadrado** (D.13).

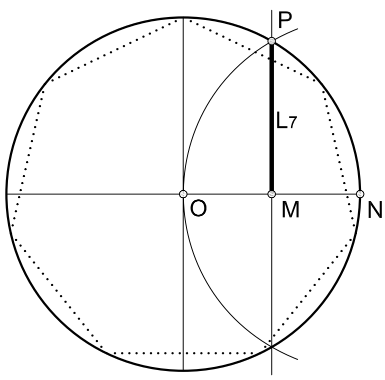


D.13

Para obtener el lado L_5 del **pentágono regular** (D.14), desde el punto medio *M* del radio *ON*, y con radio *AM*, trazamos el arco *AB* hasta cortar al diámetro *PN*; el segmento *AB* es el lado buscado. Además, el segmento *OB* es el lado L_{10} del decágono regular inscrito en la circunferencia.



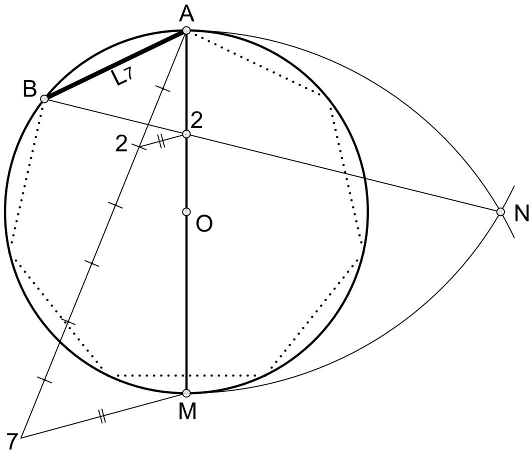
D.14



D.15

El lado L_7 del **heptágono regular** (D.15) coincide con la semicuerda *MP* perpendicular al radio *ON* por su punto medio M. Observa que L_7 es la altura del triángulo equilátero de lado el radio de la circunferencia (o sea L_6), y también coincide con la mitad de L_3, lado del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

Hay un método general, que en este caso aplicamos a la construcción de un heptágono (D.17). Dividimos un diámetro *AM* cualquiera en el mismo número de partes iguales que lados tenga el polígono que queremos construir. Con radio *AM* y centros en *A* y *M*, trazamos dos arcos que se cortan en *N*. Unimos *N* con la segunda de las *n* partes en que dividimos el diámetro, y prolongamos hasta cortar con la circunferencia en *B*. La cuerda *AB* es el lado buscado.



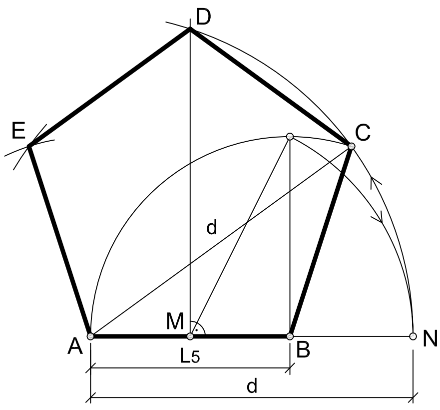
D.16

Recuerda que partiendo de un polígono de *n* lados, siempre podemos obtener el de *2n* lados trazando las mediatrices de sus lados, o lo que es lo mismo, las bisectrices de los ángulos centrales del polígono original.

2.2.2. Construcción de polígonos regulares conociendo el lado.

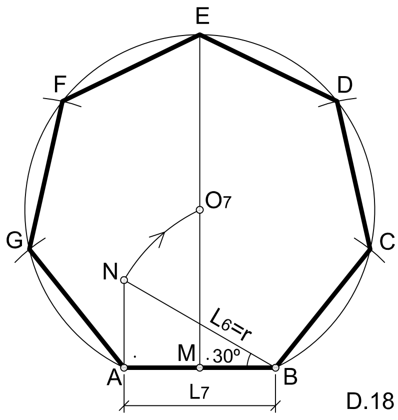
Damos por sabida la construcción del triángulo equilátero, del cuadrado y del hexágono conociendo su lado.

Para construir el **pentágono regular** partiendo del lado *AB* (D.17) nos basamos en la relación áurea entre el lado y la diagonal de este polígono. Por cualquiera de los dos métodos conocidos, obtenemos la diagonal *d=AN=AC*, segmento cuyo áureo es el lado *AB*, y a partir de aquí, completamos el pentágono por triangulación.



D.17

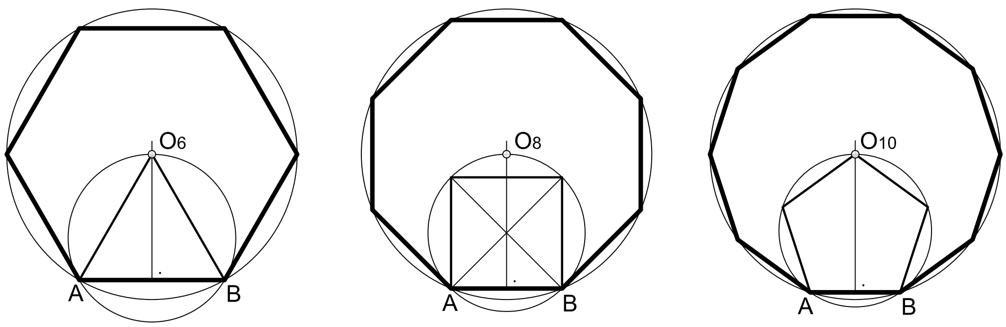
No olvides que en los polígonos regulares de *n* impar lados, los vértices se hallan en la mediatriz de los lados opuestos.



D.18

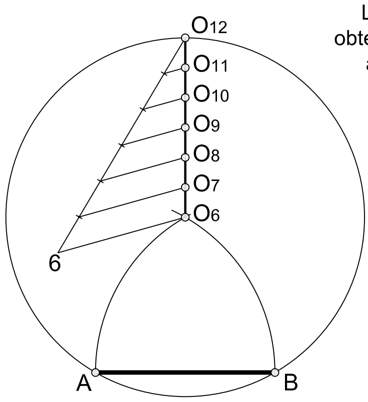
En el caso del **heptágono regular** (D.18) hemos de recordar la construcción de dicho polígono partiendo del radio, entendiendo que la altura de un triángulo equilátero de lado L_6, lado de un hexágono regular (que coincide con el radio del polígono), es el lado L_7 del heptágono inscrito en una circunferencia de mismo radio. Obtenido dicho radio *BN*, determinamos el centro O_7 de la circunferencia.

Una forma de construir polígonos de *n* par lados partiendo del lado, es dibujar primero el polígono de *n/2* lados de mismo lado *AB* que el buscado. Dibujamos luego su circunferencia circunscrita, y el punto de ésta que pertenece a la mediatriz del lado *AB* será el centro de la circunscrita del polígono buscado. Lo vemos en el hexágono, el octógono y el decágono regular (D.19).



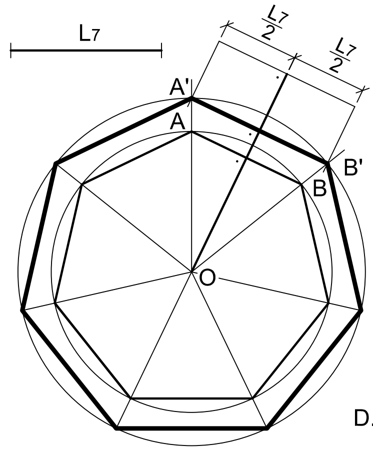
D.19

Hay dos métodos generales para obtener polígonos regulares partiendo del lado.
Por el primer método (D.20), dividimos en seis partes iguales el segmento O_6O_{12}, centros respectivos del hexágono y del dodecágono regular de lado *AB* dado, obteniendo los centros del heptágono, octógono, eneágono, decágono y undecágono de lado *AB*. Es un método aproximado.



D.20

Los centros O_6 y O_{12} los obtenemos de forma exacta aplicando el método que acabamos de explicar.



D.21

Por el segundo, aplicándolo a un heptágono (D.21), obtenemos el polígono de lado L_7 dado, mediante una homotecia, a partir de polígono semejante de lado cualquiera, haciendo coincidir el centro *O* de la homotecia con el centro de ambos polígonos. Para ello situaremos el lado dado L_7*=A'B'* paralelo al homólogo *AB* con sus extremos en las prolongaciones de los radios *OA* y *OB* a dos vértices consecutivos *A* y *B*.

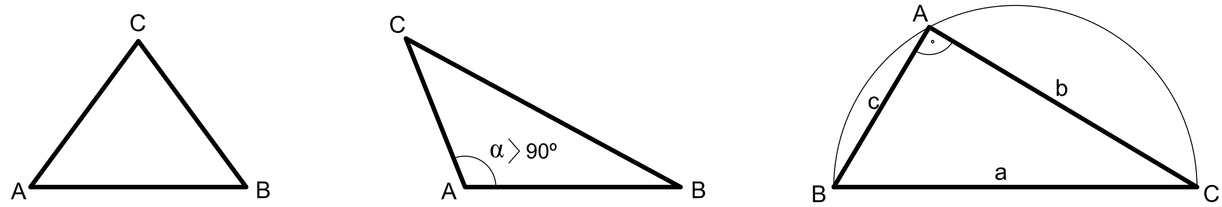
3. TRIÁNGULOS

Polígono convexo formado por tres lados, tres vértices y tres ángulos que suman 180º. Siempre que sea posible, los vértices se nombrarán en sentido antihorario y con la misma letra que el lado opuesto.

3.1. Clasificación.

- Según sus lados: equilátero, isósceles y escaleno.
- Según sus ángulos: acutángulo, obtusángulo y rectángulo (D.22).

En los triángulos rectángulos se suele designar a la hipotenusa con la letra *a*.

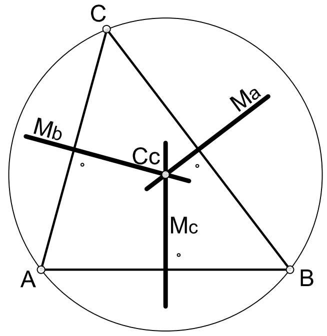


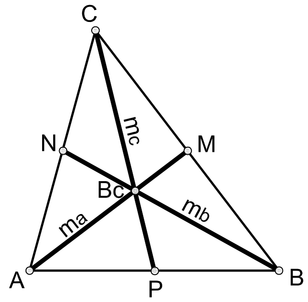
Triángulo acutángulo isósceles — Triángulo obtusángulo escaleno — Triángulo rectángulo escaleno

D.22

3.2. Rectas y elementos notables de un triángulo.

- La **mediatriz** de un lado (D.23) es la recta perpendicular a dicho lado trazada por su punto medio. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en el circuncentro (*Cc*), centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo.
- La **mediana** respecto a un lado del triángulo (D.24) es el segmento que une el punto medio del lado con el vértice opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el baricentro (*Bc*), que es el centro de gravedad del mismo y que se halla de cada vértice a 2/3 de la longitud de éste al punto medio del lado opuesto.

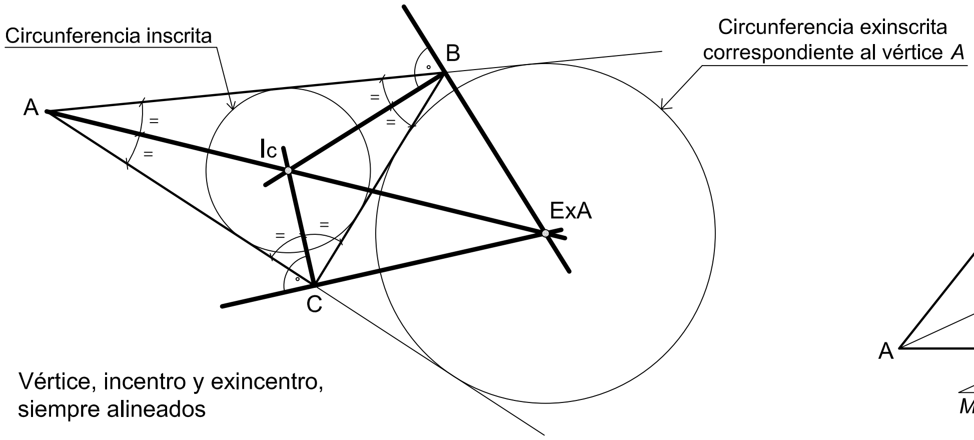


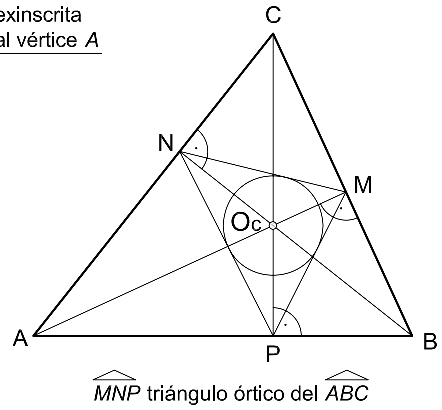


$$\overline{B_cA} = 2\,\overline{B_cM} \Rightarrow \overline{B_cA} = \frac{2}{3}\,\overline{AM}$$

D.23 D.24

- Las **bisectrices** de un triángulo (D.25) son las tres rectas que dividen cada ángulo en dos iguales. Se cortan en el incentro (*Ic*), que es el centro de la circunferencia inscrita del triángulo. Las bisectrices exteriores de dos ángulos y la interior del restante se cortan en puntos llamados exincentros, que son los centros de la circunferencias exinscritas, tangentes a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.
- La **altura** respecto a un lado de un triángulo (D.26) es el segmento perpendicular a dicho lado desde el vértice opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro (*Oc*), centro de la circunferencia inscrita al **triángulo órtico** del original, que es el que tiene de vértices los pies de las alturas.

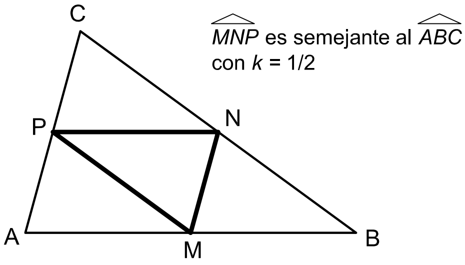




D.25 D.26

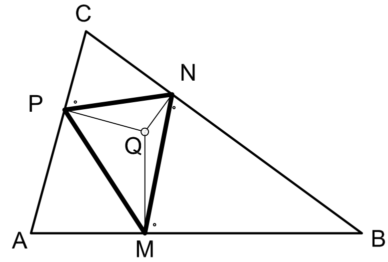
Además del triángulo órtico, conviene conocer otros dos triángulos referidos a uno dado:

- **Triángulo complementario**: sus vértices son los puntos medios de los lados del triángulo original (D.27).
- **Triángulo podar** respecto a un punto: sus vértices son los pies de las perpendiculares a los lados desde dicho punto (D.28).



$\widehat{MNP}$ triángulo complementario del $\widehat{ABC}$

D.27



$\widehat{MNP}$ triángulo podar del $\widehat{ABC}$ respecto a Q

D.28

3.3. Construcción de triángulos.

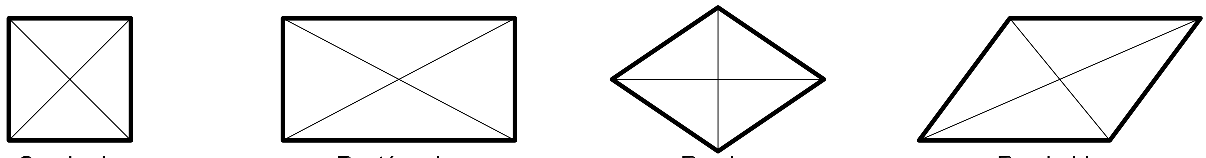
Para construir un polígono de *n* lados es preciso conocer *2n-3* datos, luego de un triángulo necesitamos conocer 3 datos, que en algunos casos serán menos si sabemos que es rectángulo o isósceles.

4. CUADRILÁTEROS

Polígono convexo formado por cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos que suman 360º.

4.1. Clasificación.

a) Paralelogramos. Sus lados opuestos son paralelos, y las dos diagonales se bisecan (D.29).



Cuadrado
- 4 lados iguales
- angulos iguales de 90º
- diagonales iguales y perpendiculares

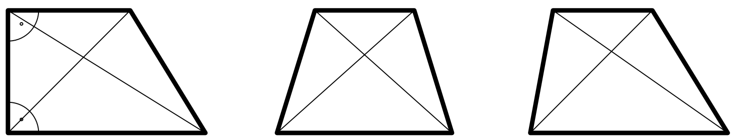
Rectángulo
- Lados opuestos iguales
- ángulos iguales de 90º
- diagonales iguales

Rombo
- 4 lados iguales
- ángulos opuestos iguales
- diagonales perpendiculares

Romboide
- Lados opuestos iguales
- ángulos opuestos iguales

D.29

b) Trapecios. Dos lados paralelos que llamamos bases (D.30).



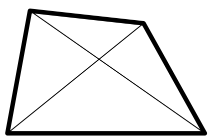
Trapecio rectángulo
Un lado perpendicular a las dos bases

Trapecio isósceles
- dos lados iguales
- diagonales iguales

Trapecio escaleno

D.30

c) Trapezoide. Cuadrilátero que no cumple ninguna de las condiciones anteriores (D.31).



D.31

4.2. Construcción de cuadriláteros.

Para construir un cuadrilátero necesitamos conocer 5 datos, que se pueden reducir si conocemos las características del mismo. Así por ejemplo, para construir un cuadrado basta conocer el lado, de un rectángulo y un rombo hacen falta dos datos, etc.

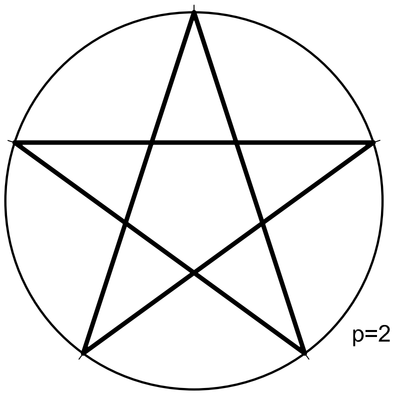
5. POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS.

Para construir un polígono regular estrellado, dividimos una circunferencia en un número *n* de partes iguales, tantas como vértices o puntas deseemos, y trazamos cuerdas uniendo las divisiones de forma rítmica (de 2 en 2, de 3 en 3, etc.) pasando por todas ellas hasta cerrar el polígono.

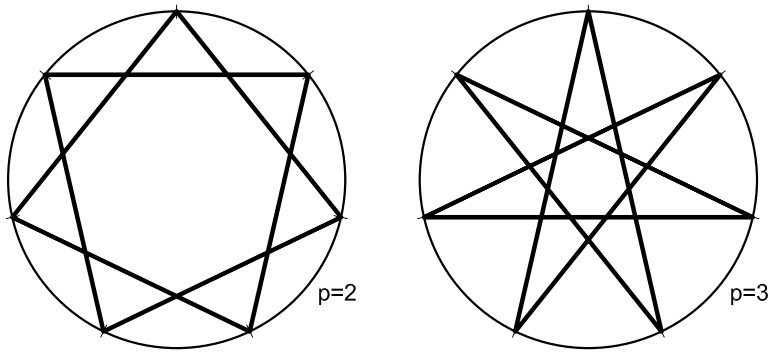
Partiendo de *n* divisiones, se pueden construir tantos polígonos estrellados como números naturales hay, menores de *n/2* y primos con *n*. Estos números son los pasos (*p*), e indican el número de saltos que hay que dar de una división a otra para determinar un nueva punta del polígono estrellado.

Por ejemplo, de un pentágono regular *n*=5 (D.32), obtenemos un sólo polígono estrellado de paso *p*=2.

De un heptágono regular *n*=7 (D.33), podremos dibujar dos polígonos estrellados de pasos *p*=2 y *p*=3, uniendo los vértices de 2 en 2 y de 3 en 3.

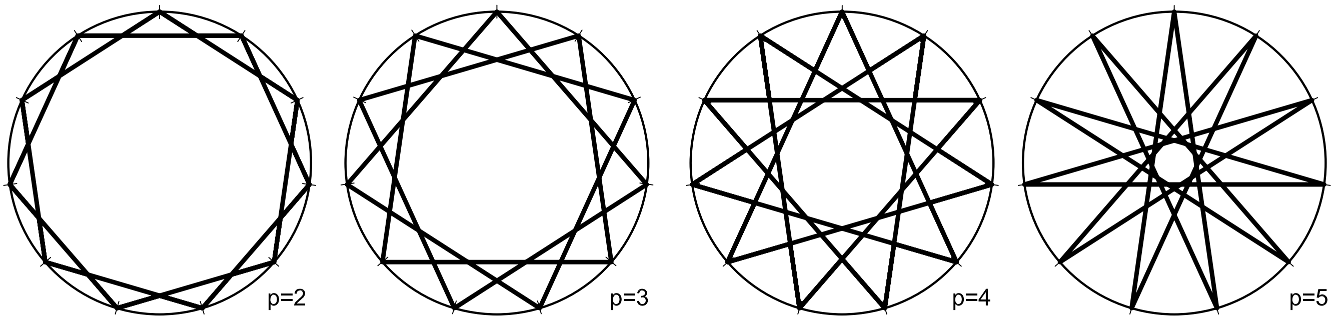


D.32



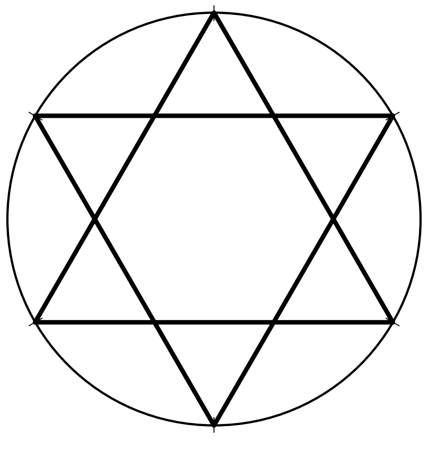
D.33

De un undecágono regular n=11 (D.34) obtendremos cuatro polígonos estrellados de pasos *p*=2, *p*=3, *p*=4 y *p*=5.



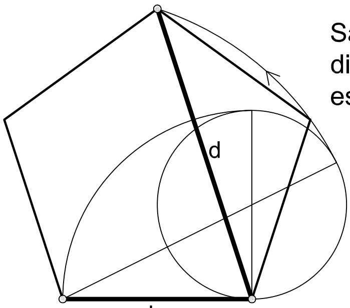
D.34

Si el paso utilizado en divisor de *n*, llegaremos al primer vértice sin haber pasado por todos ellos, obteniendo un polígono de un número de lados igual al cociente *n/p*. Es el caso de la estrella de David, que no es un polígono estrellado verdadero sino dos triángulos superpuestos.



D.35

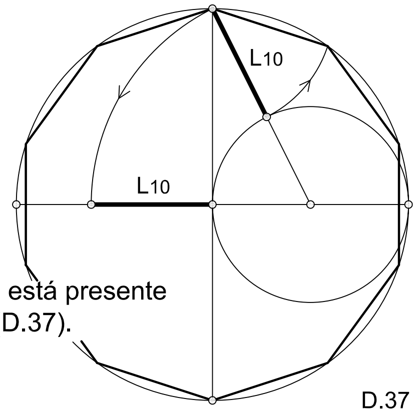
6. PROPORCIÓN ÁUREA EN EL PENTÁGONO REGULAR, DECÁGONO REGULAR Y EN EL PENTÁGONO REGULAR ESTRELLADO



D.36

Sabemos que el lado L_5 y la diagonal *d* de un pentágono regular están en proporción áurea (D.36).

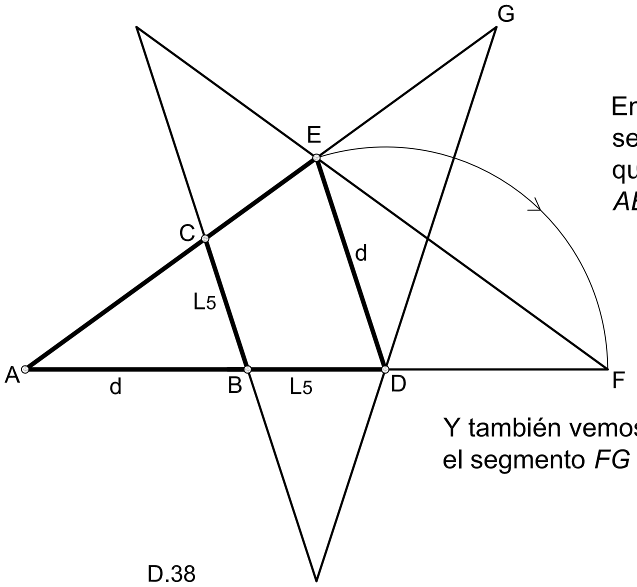
$$\frac{d}{L_5} = \Phi$$



D.37

En el decágono regular la relación áurea está presente entre el radio y el lado L_{10} del polígono (D.37).

$$\frac{r}{L_{10}} = \Phi$$



D.38

En el pentágono regular estrellado (D.38), el segmento *AB* mide igual que la diagonal *d*, por lo que de la semejanza de los triángulos isósceles *ABC* y *ADE* obtenemos esta proporción:

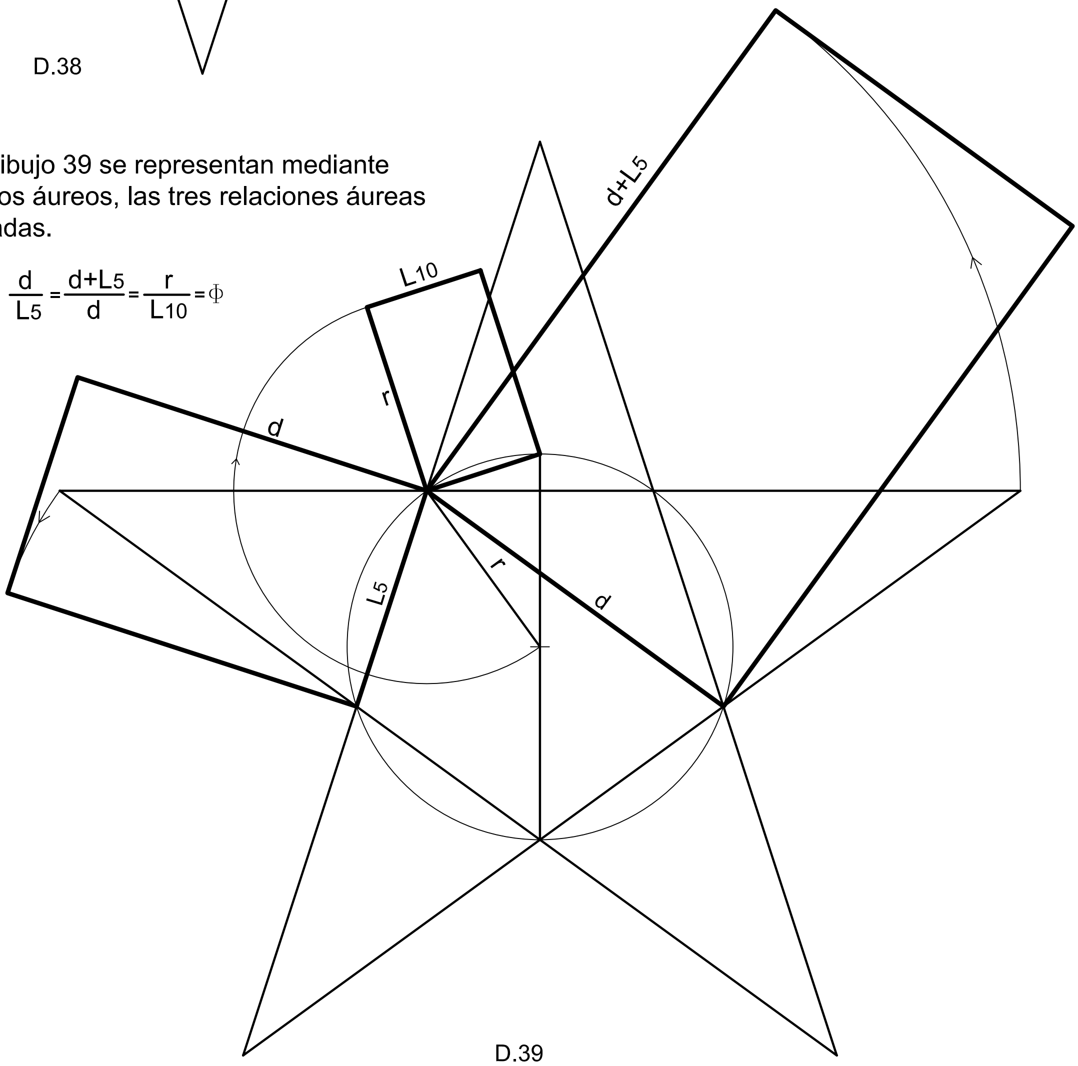
$$\frac{d}{L_5} = \frac{d+L_5}{d} = \Phi$$

de donde deducimos que *d* es el segmento áureo de $d+L_5$.

Y también vemos la misma razón entre el lado *AF* del polígono estrellado y el segmento *FG* que une dos puntas consecutivas del mismo.

En este dibujo 39 se representan mediante rectángulos áureos, las tres relaciones áureas mencionadas.

$$\frac{d}{L_5} = \frac{d+L_5}{d} = \frac{r}{L_{10}} = \Phi$$



D.39