INSTITUTO DE EDUCACIÓN SUPERIOR PEDAGÓGICO PRIVADO

“DON BOSCO”

D.S. Nº 24-89-ED

Chacas, Asunción, Ancash, Perú

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA “EL APRENDIZ TOPÓGRAFO”, BASADA EN EL ENFOQUE DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CONTENIDOS CURRICULARES DE TRIGONOMETRÍA A LOS ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA I. E. “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO, PROVINCIA CARLOS FERMÍN FITZCARRALD, DEPARTAMENTO DE ANCASH, EN EL AÑO ACADÉMICO 2016.

Autores:

ASENCIOS GUILLÉN, Fisher Christian

CRUZ PALA, Michael Iván

ROMERO CARRANZA, Saúl Cristhian

Chacas 2016

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres, hermanos y a las personas queridas quienes me han ayudado y dado la mano para seguir adelante y poder culminar lo que un dìa empezé.
Fisher Asencios

A mis queridos padres, hermanos y a las personas buenas quienes me han ayudado durante mi formacion en la casa de Don Bosco.
Iván

Este trabajo queda dedicado a mis queridos pradres, hermanos y amigos, que me han acompañado y guiado en toda la etapa de mi formación academica y moral.
Saúl

AGRDECIMIENTO

Agradecemos a Dios y a la Virgen María por darnos la salud y el bienestar, asimismo agradecemos infinitamente al Padre Ugo de Censi por habernos acogido en la Casa de Don Bosco dándonos la oportunidad de formarnos según el ideal de San Juan Bosco.

Quedamos agradecidos en forma especial con la familia Casavecchia y los queridos asistentes que han tomado el papel de padres y hermanos acompañandonos durante los cinco años de nuestra formación academica.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo general determinar la influencia de la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, en la enseñanza de los contenidos curriculares de trigonometría a los alumnos del quinto grado de educación secundaria.

La investigación es de tipo pre-experimental, se han asignado dos pruebas de muestras, uno es el pre-test y la otra el post-test, aplicada a los 15 estudiantes de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo. El objetivo se ha verificado de manera positiva al contrastar los resultados obtenidos en la preprueba y la posprueba del grupo experimental.

En este trabajo de investigación, la variable independiente es la realización del taller matemático “El Aprendiz topógrafo”, y la variable dependiente, es el aprendizaje significativo de las nociones trigonométricas. Para la realización del proyecto de esta investigación y la respectiva recolección de los datos, se han empleado la observación y la lista de cotejo como técnica e instrumento adecuado.

Se concluye verificando positivamente la hipótesis planteada: la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los contenidos curriculares de trigonometría a los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash.

Palabras clave: taller matemático, aprendizaje significativo, actividades topográficas y conceptos trigonométricos.

ABSTRACT

This research has as general objective to determine the influence of the application of the pedagogical proposal "The apprentice surveyor", based on the focusing of significant learning, in the teaching of the curricular contents of trigonometry to the students of the fifth grade of secondary education.

The research is pre-experimental type, two samples test have been assigned, and one is the pre-test and the other the post-test, applied on 15 students of the Educational Institution "Santa Rosa" Uchusquillo. The objective has been verified on positively way by contrasting the results obtained in the pre-test and post-test of the experimental group.

In this research work, the independent variable is the realization of the mathematical workshop "The apprentice surveyor", and the dependent variable is the meaningful learning of the trigonometric notions. For the realization of this research project and the respective data collection, the observation and the checklist have been used as an adequate instrument technique.

We conclude by positively verifying the hypothesis: the application of the pedagogical proposal "The apprentice surveyor", based on the meaningful learning focusing, favors the curricular contents teaching of trigonometry to the fifth grade students of the Educational Institution "Santa Rosa" of Uchusquillo, of San Luis district , of Carlos Fermin Fitzcarrald province, Ancash.

Keywords: *Mathematical workshop, meaningful learning, topographic activities and trigonometric concepts*.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación ha sido elaborado con el objetivo de ayudar a los estudiantes que cursan el quinto grado de educación secundaria, a mejorar sus conocimientos, capacidades y habilidades en el campo de la trigonometría a través del diseño y aplicación de un instrumento didáctico nuevo. Así la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, que es el centro de interés de esta investigación, pretende mejorar el aprendizaje de contenidos matemáticos, a través de un conjunto de actividades concretas y al aire libre, que ponen en práctica el uso de la trigonometría en la resolución de situaciones reales, explorando el mundo laboral del topógrafo.

Esta propuesta, diseñada según el enfoque del aprendizaje significativo, ha sido experimentada en los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la I.E. “Santa Rosa” de Uchusquillo durante el año académico 2016.

1.1 Caracterización del problema

En las evaluaciones nacionales e internacionales efectuadas en los últimos años, el sistema educativo peruano ha mostrado fuertes debilidades, evidenciando un nivel de la calidad educativa preocupante. Tanto en las evaluaciones del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), como en las del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA), los estudiantes peruanos se encuentran muy por debajo de lo esperado.

La prueba PISA 2012 muestra una realidad desconcertante con, aproximadamente, la mitad de los estudiantes peruanos que no superan el primero de los seis niveles de aprendizajes que plantea dicha prueba. Es decir, que la mitad de nuestros alumnos logran solamente aplicar procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas y explícitas, sin poder interpretar y reconocer situaciones que requieran una mínima inferencia (Guadalupe Mendizábal, 2013).

Muchos de los estudiantes, al desarrollar problemas de matemática, no logran fundamentar los procedimientos en palabras claves y no pueden asociarlos a situaciones reales. Además, no estiman al tipo de solución al que se debe llegar. Asimismo, este problema se relaciona con la deficiente asimilación de contenidos palpables en el momento en que la institución evalúa el nivel de conocimiento que trae el alumno al ingresar en el nivel medio superior; lo que da lugar a que los profesores de este nivel culpen a los del nivel inferior de no estar enseñando lo debido (Reyes Hernandez, 1999).

Así, a pesar del esfuerzo del gobierno peruano en materia de educación, esfuerzo también económico con una inversión por estudiante semejante a la de países como Uruguay, el nivel académico de los alumnos se establece fuertemente por debajo de lo esperado, en comparación a otros países caracterizados por condiciones sociales y económicas similares a las del Perú(Ganimian, 2015).

Otro punto crítico del sistema educativo nacional, como lo evidencian estos resultados, son las fuertes disparidades en el nivel educativo entre géneros, áreas geográficas, áreas urbanas y rurales del país y entre las distintas áreas pedagógicas. Factor que indica la fuerte influencia de las disparidades de las condiciones sociales que afectan el sistema educativo nacional y, en especial manera, a los estudiantes provenientes de las provincias alejadas del territorio andino como la de Carlos Fermín Fitzcarrald, área de interés de este estudio.

Efectivamente, en las zonas rurales de nuestro país, los alumnos tuvieron un desempeño bastante menor que los de las áreas urbanas, estableciendo el nivel de logro, de casi la totalidad de la muestra, por debajo del nivel 1. Los alumnos de la zona de interés de nuestro estudio resultan, indicativamente, atrasados en dos años de aprendizaje, respecto a sus compañeros que cursan el mismo grado en instituciones educativas de las ciudades.

Comparando los resultados de la prueba 2012 con las pruebas anteriores, resalta una tendencia positiva en la comprensión lectora y en las habilidades comunicativas. Este dato es positivo, pero no se registra en el área curricular de matemática en la cual los estudiantes han obtenido un resultado igual al de sus compañeros evaluados en el 2009.

Las evaluaciones realizadas en el 2012 resaltan también una fuerte desigualdad del nivel de logro académico en relación a las condiciones socio-económicas de los alumnos: en el área de matemática, entre los estudiantes de instituciones privadas y los estudiantes de las instituciones públicas, se ha registrado una diferencia indicativa de dos años de aprendizaje (Ganimian, 2015).

El cuadro, que resalta estas pruebas y que describe la realidad del sistema educativo nacional, requiere una toma de conciencia seria.

A la base del bajo desempeño pueden constatarse varios factores: limitada disponibilidad de recursos económicos, falta de materiales educativos, inadecuadas infraestructuras y de los recursos humanos, es decir, un número reducido de profesores con respeto al número de los alumnos y docentes desmotivados, entre otras condiciones.

Estas condiciones, combinadas con las desigualdades del background socio-económico de los alumnos, conllevan al desarrollo de la problemática que afecta el sistema educativo nacional.

Otro problema que perjudica a nivel nacional la calidad de la educación peruana es la alta tasa de ausentismo y el bajo esfuerzo docente. Existe evidencia de que en los países en desarrollo, hay un fuerte ausentismo. Por ejemplo, en el caso de los trabajadores de la educación, N. Chaudhuryencuentra que, en el Perú, la tasa de ausentismo es del 11% (Álvarez Parra, 2012). De este modo se hace indispensable mejorar la calidad de la plana profesoral e introducir planes de entrenamiento y capacitación continuos que hagan atractiva y dinámica la carrera docente e incentiven a los profesores a mejorar.

Por otra parte, los profesores de matemática y de distintas áreas del conocimiento científico, se encuentran frecuentemente frente a las exigencias didácticas cambiantes e innovadoras, lo cual requiere una mayor atención por parte de las personas que están dedicadas a la investigación en el campo de la didáctica de la matemática y, sobre todo, al desarrollo de unidades de aprendizaje para el tratamiento de la variedad de temas dentro y fuera de la matemática (García Ruiz, 2012).

La situación registrada a nivel nacional se agrava si se observa a nivel regional y local. Por ejemplo, si se analiza el nivel de eficiencia de los centros educativos de Ancash, estos resultan aprovechar solamente al 42% de sus potencialidades, considerando los recursos y el entorno en el cual operan; índice que coloca esta realidad por debajo de la media nacional que corresponde al 46% (Álvarez Parra, 2012).

Examinando las pruebas censales de 2014, el cuadro, que describe la situación educativa del departamento de Ancash, resulta realmente preocupante, pues solo el 20 % de estudiantes alcanzan un nivel satisfactorio. Una realidad similar a departamentos como Tumbes, Madre de Dios y Huánuco y mejor solamente a los departamentos de Ucayali y Loreto.

En este cuadro resulta que más del 60% de los alumnos no logran alcanzar los aprendizajes esperados, valor que varía notablemente entre las áreas urbanas y rurales del departamento. Resalta que mientras los alumnos ancashinos de las instituciones educativas urbanas obtuvieron un promedio de 523, con un 14% de alumnos que alcanzan un aprendizaje esperado, los alumnos de las áreas rurales obtuvieron un promedio de 444. En estas áreas el porcentaje de alumnos que no alcanza tampoco un aprendizaje en proceso llega a más del 80% y tan solo el 2 % de los alumnos alcanzan resultados satisfactorios.

Los resultados registrados en la UGEL de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald, encajan en el marco de las instituciones que operan en las áreas rurales de Ancash, con un 81,4% de alumnos que se califican debajo del nivel 1, aprendizaje en inicio; el 16,8% de alumnos que se califican en proceso y solamente el 1,8% de los alumnos censados que alcanza el aprendizaje esperado. Es decir que la UGEL de la provincia CFF se encuentra en uno de los últimos puestos en cuanto a los resultados que corresponden al nivel satisfactorio (Ministerio de Educación, 2014).

El bajo desempeño de los alumnos en las instituciones rurales puede estar relacionado a los bajos recursos socioeconómicos de las familias, de las comunidades de donde provienen y de las instituciones educativas. Como es de esperar, los colegios ubicados en distritos con mayor nivel de ingreso tienen un desempeño significativamente mejor; mientras que los ubicados en áreas rurales, con ingresos económicos familiares reducidos y servicios básicos como el servicio médico sanitario, el servicio eléctrico y los sistemas de aguas servidas, inadecuados, demuestran muy malos resultados. En el estudio presentado por Álvarez Parras Fernando en el 2012, la brecha entre los colegios operantes en los niveles socio-económicos más bajos y los que trabajan en las realidades sociales más favorecidas, es notable, con un 9% de colegios del primer quintil que alcanzan un aprendizaje esperado contra el 22% del quinto quintil. Así, interpretar los datos del desempeño de los alumnos de las áreas más desfavorecidas es difícil. ¿Cuánto de este déficit educativo es atribuible a las condiciones socio-económicas adversas? ¿Cuánto es debido a una ineficiencia del sistema?(Álvarez Parra, 2012).

Lo que queda como objetivo es que los alumnos de las áreas rurales, como los de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald, quedan fuertemente afectados y casi excluidos de las posibilidades de recibir una educación adecuada.

1.2 Enunciado del problema

Frente a estas problemáticas descritas, con el propósito de ofrecer un instrumento útil a mejorar esta situación, se plantea la siguiente pregunta:

¿De qué manera la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece el aprendizaje de los contenidos curriculares de trigonometría a los alumnos del quinto grado de educación secundaria?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Determinar la influencia de la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, en la enseñanza de los contenidos curriculares de trigonometría a los alumnos del quinto grado de educación secundaria.

1.3.2 Objetivos específicos

- Diseñar la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", basada en el enfoque del aprendizaje significativo para la enseñanza de los contenidos curriculares de Trigonometría a los alumnos del quinto grado de Educación Secundaria

- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y especificadamente de los contenidos curriculares de trigonometría de los alumnos del quinto grado de educación secundaria de la institución educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo a través de un pre-test.

- Aplicar la propuesta pedagógica "El Aprendiz Topógrafo", basada en el enfoque significativo, utilizando material concreto para favorecer el aprendizaje matemático y especificadamente los contenidos curriculares de trigonometría en los alumnos del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald del departamento de Ancash, en el año académico 2016.

- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y especificadamente los contenidos curriculares de trigonometría de los alumnos del quinto grado de educación secundaria de la institución educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo a través de un post-test.

Contrastar los niveles de aprendizaje de las dos observaciones para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los contenidos curriculares de trigonometría a los alumnos del quinto grado de educación secundaria.

1.4 Justificación de la investigación

El presente trabajo de investigación se justifica con la finalidad de dar una respuesta a la problemática que caracterizan el sistema educativo nacional y, en forma más específica, la educación en las áreas rurales, como la provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, considerando que la falta de estrategias didácticas nuevas y motivadoras es uno de los puntos críticos de esta realidad.

En particular, con esta investigación, se quiere diseñar un instrumento didáctico útil a mejorar el aprendizaje de la matemática, principalmente en el campo de la trigonometría; como se menciona en la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN-2006), los estándares identificados en el capítulo de la fundamentación resaltan la trigonometría como un conocimiento que hace parte de la matemática y que un estudiante debe dominar eficazmente al concluir la educación básica regular.

Así la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", que es el centro de interés de esta investigación, pretende mejorar el aprendizaje de contenidos matemáticos, a través de un conjunto de actividades concretas y al aire libre, que ponen en práctica el uso de la trigonometría en la resolución de situaciones reales, explorando el mundo laboral del topógrafo.

A lo largo de su desarrollo, la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", ha ayudado a alcanzar uno de los ocho aprendizajes fundamentales mencionados en el Marco Curricular Nacional: "construir y usar la matemática en y para la vida cotidiana, el trabajo, la ciencia y la tecnología".

Dicha capacidad supone que todos los estudiantes planteen y resuelvan diversos problemas en situaciones de contexto real, matemático y científico que implican la construcción y el uso de los saberes matemáticos, empleando diferentes estrategias, argumentos y valorando sus procedimientos y resultados (Ministerio de Educación, 2014).

Los resultados del presente estudio de investigación constituyen un aporte significativo para que otras instituciones educativas promuevan el uso y la implementación dela propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, luego de verificar los resultados de la aplicación de la misma. De esta manera, la educación secundaria en el área curricular de matemática en las áreas rurales podrá sermás eficaz y se podránsuperar algunas de las dificultades que perjudican los resultados académicos de los alumnos de estas regiones.

1.5 Hipótesis

H_1 La aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza delos contenidos curriculares de trigonometría a los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú.

H_0 La aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, no favorece la enseñanza delos contenidos curriculares de trigonometría a los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú.

II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1 Antecedentes

Al realizar el siguiente trabajo de investigación se ha logrado encontrar algunos trabajos como antecedentes relacionados con el aprendizaje de la matemática y la trigonometría, que a continuación se mencionan:

Nebot A. realizó un estudio sobre “Estilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”, en el cual manifiesta que “la enseñanza debe adaptarse al estudiante”. También afirma que el alumno es quien ocupa el centro de todo acto educativo, lo que expresa que el maestro es un mediador entre el conocimiento y el estudiante. Así el trabajo por proyectos, presentado en esta investigación, donde el estudiante es parte activa del proceso de enseñanza y aprendizaje, es concorde con el enfoque pedagógico sustentado por Nevot.

En el año 2003, José Ramón Jiménez Rodríguez, realizó un trabajo de investigación para la Universidad de Sonora, en México, en el cual trata de incidir en la solución de los siguientes problemas:

El primer problema es la insuficiente o deficiente preparación de los maestros de matemáticas; el segundo es la “carencia de recursos educativos consistentes, para un aprendizaje significativo y eficaz en la comprensión de conceptos matemáticos especialmente en el campo de la trigonometría”.

Por este motivo, el autor propone que el proceso de la construcción del conocimiento se debe llevar de manera que el alumno interactúe con su medio ambiente físico o con objetos concretos contenidos en el mismo. Por lo que el profesor debe diseñar la situación didáctica de modo que el alumno interactúe con su entorno próximo, como la infraestructura del mismo centro educativo, la plaza de su pueblo, el patio donde juega. Esta interacción entre conocimientos teóricos y entornos reales, no deberá ser arbitraria, azarosa o sin propósito definido, sino que será relacionada con el objetivo que se desea alcanzar en la concepción del conocimiento deseado.

Dicha investigación reveló que algunos componentes o lineamientos del diseño de los problemas mencionados se llevaron a cabo de manera satisfactoria y otros de manera insatisfactoria (San Martín Sicre, 2003).

2.2 La trigonometría

La trigonometría es el conjunto de conocimientos que facilita la medición de los entornos próximos (topografía) como de los entornos lejanos (astronomía) mediante métodos precisos y eficaces, dicho conjunto tiene una gran importancia por su aplicación en numerosas situaciones de la vida real.

El término trigonometría proviene de las palabras griegas trígonon (triángulo) y métron (medida) y esta raíz etimológica explica y reúne en si la verdadera natura de la trigonometría. En efecto, la trigonometría propone resolver problemas de cualquier forma geométrica, tanto en el plano como en el espacio, descomponiéndolas en triángulos. Es considerada como parte de la geometría aún si se expande hasta el campo del álgebra.

2.2.1 Historia de la trigonometría

La trigonometría se concibió en la antigüedad con el objeto de medir ángulos y distancias para el estudio geográfico de nuestro planeta y para estudiar el cosmos que lo rodea; sin embargo, la trigonometría juega hoy día un papel importante en la investigación. Por eso autores como Dolciani, Berman y Wooton, la definen como una ciencia antigua con aplicaciones ultramodernas (Mary P. Dolciani, Simon L. Berman, William Wooton, 1976).

Esta disciplina, al igual que cualquier otra rama de la matemática, no fue el resultado de la labor de un solo hombre o de una sola nación. Sino es el resultado del aporte de las varias civilizaciones antiguas que pusieron sus bases y de la continua investigación del hombre que sigue hasta nuestros días.

Su historia comienza con los babilonios y los egipcios. Hace más de 3.000 años los babilonios empleaban los ángulos de los triángulos y sus razones trigonométricas para realizar medidas en la agricultura; en la astronomía, para calcular la posición de cuerpos celestes, la predicción de sus órbitas, para construir calendarios y medir el tiempo y en la navegación, se mejoró los trazos de las rutas con exactitud y su ubicación en ellas.

Los egipcios, aplicaban la trigonometría en la construcción de las pirámides donde establecieron la medida de los ángulos sexagesimales en grados, minutos y segundos, criterio que se ha mantenido hasta hoy (Flores Gil, 2008).

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a Grecia, donde destacó el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea en el siglo II a.c. siendo uno de los principales desarrolladores de la trigonometría. Hiparco construyó las tablas de "cuerdas" para la resolución de triángulos planos, que fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad.

Al mismo tiempo, en India, los astrónomos desarrollaron otro sistema trigonométrico, semejante a lo que actualmente conocemos como seno. En el sistema indiano se relacionaba la amplitud del ángulo con el cateto opuesto en un triángulo rectángulo de hipotenusa nota. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para esa función seno en sus tablas (Flores Gil, 2008).

Un fuerte impulso al desarrollo de esta disciplina en la antigüedad fue dado por los astrónomos árabes quienes, a finales del siglo VIII, introdujeron la función seno. A finales del siglo X ya habían completado tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas: coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Los estudiosos árabes también descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos poniendo así las bases de la trigonometría actual.

Por último, en elsiglo XVIII, el matemáticosuizoLeonhardEulerdemostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además, definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos (Flores Gil, 2008).

2.2.2 La trigonometría y la realidad cotidiana y laboral

En la actualidad la trigonometría desempeña un rol importante en todos los campos de la investigación científica y en muchas aplicaciones prácticas de la vida diaria.

La aplicación de los conceptos trigonométricos, tanto planos como esféricos, ha permitido al hombre perfeccionar las técnicas de navegación, la elaboración de mapas geográficos, la construcción de obras arquitectónicas e ingenierísticas relevantes (Antonio Gonzales, Beatriz Moreno, Pablo, Nuñes de la Torre, 2009).

Como antes se ha mencionado existen numerosas situaciones en las cuales la trigonometría permite resolver problemas de la vida cotidiana como en la acústica, en la óptica, la electrónica, la astronomía; así mismo la trigonometría tiene implicancias en otras disciplinas del conocimiento humano, por ejemplo en ciencias sociales (arquitectura y arte), ciencias de la naturaleza (conocimiento e interpretación del medio natural), tecnología (diseño y construcción de instrumentos de medida), en educación física (senderismo y orientación), educación plástica y visual (realización y presentación de planos y trabajos topográficos), realización y análisis de fotografías, manejo de los instrumentos de medida (brújula, clinómetro y curvímetro) (Cabellos & Montoro, 2001).

2.3 El aprendizaje de la trigonometría

La matemática siempre ha desempeñado un papel importante en el desarrollo y avance de los conocimientos científicos y tecnológicos. Por tal motivo su conocimiento es fundamental, ya que esta disciplina estimula en los alumnos el desarrollo de sus capacidades reflexivas y lógicas; dentro de las aulas el aprendizaje de la matemática y las ramas que la componen, se torna en cierta forma abstracta (Flores Gil, 2008), por eso, para alcanzar un aprendizaje significativo, es necesario que los conceptos de la matemática en general y la trigonometría en particular, sean llevados a la práctica dentro de los contextos reales; de esta forma los estudiantes sentirán satisfacción al relacionar los conocimientos de la trigonometría con la vida diaria (Ortiz Luis Alfredo Guerrero, 2013).

Los conceptos matemáticos, a pesar de su aparente abstracción están involucrados en una gran multitud de aplicaciones en situaciones reales de la vida de cada día. Se podría decir que estamos rodeados de situaciones matemáticas en todas sus diferentes ramas; en la vida diaria, cada uno de nosotros, más o menos conscientemente, utilizamos a menudo números, conocimientos matemáticos, relaciones. Toda la técnica, la ciencia que rige nuestra sociedad tiene una base en contenidos matemáticos. En esta perspectiva los contenidos geométricos y trigonométricos del currículo de matemática resaltan por ser estrictamente ligados a muchas situaciones reales que a diario los mismos alumnos enfrentan. Sin embargo, en la práctica docente la geometría frecuentemente ocupa un lugar marginal por dar más importancia a los temas relacionados a la aritmética y al álgebra. La trigonometría, resulta casi ausente en las programaciones anuales ocupando el lugar del último tema a tratar. Esta problemática se registra sobre todo en la realidad rural, donde las múltiples condiciones adversas obstaculizan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La marginalidad de la trigonometría en las programaciones de los docentes puede encontrar su causa en la complejidad de sus contenidos y de los contenidos previos que su enseñanza requiere, en la falta de estrategias y de materiales didácticos eficaces.

Para el aprendizaje de la trigonometría, es necesario partir de los conceptos de la geometría.

> "La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la trigonometría. Los conceptos de la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención"(Antonio Gonzales, Beatriz Moreno, Pablo, Nuñes de la Torre, 2009, pág. 6).

La trigonometría, aún si con un enfoque diferente, trata de estudiar, describir, medir y representar formas y elementos geométricos tanto en el plano como en el espacio. Así los elementos fundamentales de la geometría, las figuras geométricas y sus propiedades, y entre estas especialmente el triángulo, son conocimientos propedéuticos para acercarse a la trigonometría.

El Diseño Curricular Nacional, así como las Rutas delAprendizaje, presentan la trigonometría como un aprendizaje fundamental dentro de la Educación Básica

Regular a los alumnos del VII ciclo, que abarca desde el tercer grado hasta el quinto grado de educación secundaria. Presentando los conceptos básicos de la trigonometría de manera gradual, es decir, empezando de lo básico para llegar a lo más complejo.

El DCN al igual que las Rutas del Aprendizajeproponelos conceptos de la trigonometría desde el tercer grado de educación secundaria algunos contenidos elementales como las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y su aplicación para resolver problemas sencillos con ángulos de elevación y ángulos de depresión. En el cuarto grado se introducen unas demostraciones de los conceptos trigonométricos para resolver los triángulos rectángulos. Pero es en quinto grado de educación secundaria que el currículo exige alcanzar las capacidades de razonamiento y demostración para elevar el aprendizaje de los conceptos de la trigonometría. En este nivel educativo se espera que el alumno aprenda a demostrar las identidades trigonométricas, los teoremas del seno y del coseno y a analizar las funciones trigonométricas utilizando la circunferencia. Esto para poder llegar a ser capaz de aplicar estos conceptos a la resolución de todo tipo de triangulo oblicuángulo.

Al finalizar el análisis de la implicancia de la trigonometría en el DCN, se comprueba que al quinto grado los conocimientos son más completos y complejos, por lo cual se requiere una mayor atención en el desarrollo de sus conceptos (Ministerio de Educación, DICEÑO CURRICULAR NACIONAL, 2009)(Ministerio de Educación, RUTAS DEL APRENDIZAJE, 2015).

Como en toda materia de estudio también en la trigonometría podemos dividir el aprendizaje en dos grandes bloques: el bloque de los contenidos o conocimientos conceptuales y el bloque de las capacidades o conocimientos procedimentales. Es decir, que el aprendizaje consta tanto con el conocimiento de las nociones y conceptos propios de la trigonometría y necesita la capacidad de proceder a la aplicación de estos para resolver los problemas propuestos.

En la estructura conceptual de la trigonometría distinguimos dos niveles de aprendizaje, hechos y conceptos. El nivel de los hechos se puede dividir en cuatro sub-niveles: términos, notaciones, convenios y resultados:

TABLA 1

TABLA 1

<table>
<tr><td rowspan="5">CONOCIMIENTO CONCEPTUAL</td><td rowspan="4">HECHOS</td><td>TÉRMINOS</td><td>• Ángulo, medida en grados
• Ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos
• Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos.
• Triángulo, triángulos agudo, rectángulo y obtusángulo.
• Elementos de un triángulo rectángulo: catetos e hipotenusa.
• Teorema de Pitágoras
• Semejanza. Teorema de Thales
• Sistemas de coordenadas cartesianas. Cuadrantes
• Circunferencia goniométrica</td></tr>
<tr><td>NOTACIONES</td><td>• Grado sexagesimal “°”
• Grado centesimal “^{g}”
• Radianes “rad”
• sen, cos, tan
• $(\text{sen}\ \alpha)^2=\text{sen}^2\ \alpha$, esta notación se sigue para cualquier potencia de cualquier razón trigonométrica.</td></tr>
<tr><td>CONVENIOS</td><td>• Orientación de los ángulos: los ángulos positivos se miden en sentido antihorario</td></tr>
<tr><td>RESULTADOS</td><td>• Las razones trigonométricas dependen sólo de la amplitud del ángulo y no de los lados del triángulo
• La tangente es cociente entre seno y coseno
• $\text{sen}\ \alpha=\text{sen}(\alpha+360^{\circ})$
• $\cos\alpha=\cos(\alpha+360^{\circ})$
• El seno y coseno toman valores en el intervalo [-1,1] y la tangente no existe para múltiplos de $\pi/2$.
• Regla de los signos
• Fórmulas para ángulo complementario, suplementario, opuesto y ángulos que difieren 180º
• Fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos
• Los puntos de la circunferencia unidad tienen por coordenadas al coseno y seno del ángulo
• Fórmula del área para un triángulo cualquiera</td></tr>
<tr><td>CONCEPTOS</td><td colspan="2">• Medida de ángulos en radianes
• Razones trigonométricas básicas en triángulo rectángulo
• Razones trigonométricas básicas en circunferencia goniométrica
• Resto de razones trigonométricas
• Relaciones fundamentales entre razones trigonométricas
• Teorema de los senos, Teorema del coseno
• Periodicidad del seno y coseno, funciones trigonométricas</td></tr>
</table>

Tabla 1: *Estructura conceptual.* (Modificado de Medina, 2010)

En la estructura procedimental se distinguen tres niveles de complejidad: destrezas, razonamientos y estrategias:

TABLA 2

Estructura procedimental

<table>
<tr><td rowspan="6">CONOCIMIENTO PROCIDEMENTAL</td><td>DESTREZAS</td><td colspan="2">• Relacionar ángulos y arcos de circunferencia
• Identificar y dibujar distintos tipos de ángulos y triángulos
• Conversión de unidades de medida de ángulos de modo manual y con calculadora
• Indicar los ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y aquellos que difieran 180º en la circunferencia
• Identificar cateto mayor, menor e hipotenusa
• Identificación de cuadrantes
• Proyectar puntos sobre los ejes
• Representación de ángulos en la circunferencia goniométrica
• Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos agudos, a partir de su definición, en triángulos rectángulos
• Construir un triángulo rectángulo del que se conocen las razones trigonométricas de sus ángulos
• Uso de calculadora para cálculo de razones trigonométricas
• Uso de los conocimientos geométricos en la medida de áreas y volúmenes</td></tr>
<tr><td rowspan="4">RAZONAMIENTOS</td><td>DEDUCTIVO</td><td>• Comprobar la validez de las relaciones fundamentales con distintos ángulos
• Cálculo de las razones trigonométricas en 2º,3º y 4º cuadrante
• Demostración de igualdades derivadas de las relaciones fundamentales
• Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos notables a partir del triángulo equilátero e isósceles</td></tr>
<tr><td>INDUCTIVO</td><td>• Reconocimiento de fórmulas por el método de ensayo-error
• Obtención de la regla de los signos</td></tr>
<tr><td>ANALÓGICO</td><td>• A partir de la fórmula del seno del ángulo doble/mitad, obtención de la fórmula del coseno del ángulo doble/mitad</td></tr>
<tr><td>FIGURATIVO</td><td>• Estimación del valor de un ángulo y de sus razones trigonométricas a partir de su representación gráfica
• Uso de tablas de valores de razones trigonométricas
• Representación de triángulos rectángulos para la resolución de problemas</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS</td><td colspan="2">• Resolución de triángulos rectángulos
• Cálculo de áreas y longitudes
• Resolución de diferentes problemas geométricos utilizando los distintos resultados teóricos conocidos
• Resolución de triángulos cualesquiera mediante la “Estrategia de la altura", de la “doble medida”, Teorema del seno, Teorema del coseno, etc</td></tr>
</table>

Tabla 2: *Estructura procedimental.* (Modificado de Medina, 2010)

Para producir un aprendizaje significativo de la trigonometría, es necesario considerar y resaltar en la práctica de enseñanza la fenomenología, las situaciones reales que implican los conceptos trigonométricos y a las cuales la trigonometría da una respuesta.

Esto es como dar a los alumnos las respuestas a interrogantes como: ¿para qué sirve la trigonometría?, ¿en cuáles situaciones se hace útil? Al mismo tiempo poder elevar los conceptos teóricos a la práctica y con ellos resolver problemas realísticos que ayuden a contextualizarlos y relacionarlos con otros conocimientos, aprender a utilizarlos y construir una estructura cognitiva entrelazada.

La trigonometría cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por esto, identificar tales situaciones, aplicar estrategias para resolver problemas, seleccionar técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir unos datos son parte fundamental de su aprendizaje. Por tal motivo, este objetivo se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen a una amplia variedad de situaciones y fenomenologías, provenientes de otros campos del conocimiento y de la vida cotidiana (Medina, 2010).

Para que el aprendizaje de la trigonometría sea efectivo, los alumnos tendrán que poder aplicar sus conocimientos a la resolución de problemas. En este tipo de tarea se hace necesario relacionar diferentes conocimientos y novelizar el problema para poder encontrar una estrategia adecuada a su solución. El primer paso para la modelización del problema es una representación gráfica: interpretar el enunciado, deducir las informaciones y convertirlas en un gráfico que represente la situación problemática a resolver. Relacionado el problema a una situación, realística o puramente teórica, será necesario encontrar las estrategias que pueda conducir de las informaciones disponibles al resultado del problema. Trabajar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría a través de prácticas, utilizando situaciones significativas reales para presentar problemas y aplicar contenidos trigonométricos para su solución resulta ser de gran utilidad para desarrollar en los alumnos una capacidad real de utilizar sus conocimientos y aplicarlos en la realidad.

2.3.1 Dificultades y errores en la didáctica de la trigonometría

Los errores en matemática, aparentemente, son cometidos solamente por los estudiantes y no por los docentes. Esta concepción equivocada ha llevado al perdurar de estrategias didácticas inadecuadas y a una mistificación de esta área pedagógica que, en el pensamiento de los alumnos, parece imposible de aprenderse. No se puede encontrar una única causa de los errores y dificultades que limitan el aprendizaje matemático y especificadamente de la trigonometría. El proceso de enseñanza y aprendizaje es muy complejo y en él intervienen numerosos factores y variables relacionadas a los alumnos, a los docentes, a los recursos disponibles, al entorno en general. Por eso, es muy difícil encontrar respuestas unívocas a las preguntas que planteamos. ¿Qué frena el aprendizaje de la trigonometría en los estudiantes del quinto grado de secundaria? ¿Qué dificultades encuentran en la asimilación de sus contenidos? ¿Por qué los alumnos pierden el interés en el aprendizaje de los conocimientos trigonométricos?

Los alumnos pueden encontrar problemas a la hora de asimilar un concepto, ya sea por la carencia de los saberes previos que son necesarios para ser relacionados con los nuevos conocimientos o debido a la propia dificultad del contenido matemático.

El profesor una vez "diagnosticado" el problema, debe afrontarlo prestando una mayor atención a esa parte del contenido que resulta complejo, debe recoger y reforzar los contenidos propedéuticos al tema y debe intentar que el alumno se interese y tome conciencia del error y de dónde proviene, para así, promover su actitud crítica en el proceso de aprendizaje.

Si esto se verifica generalmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se verificará aún más en los contenidos de la trigonometría en los cuales se introducen por primera vez conceptos que resultan complejos, como la orientación de los ángulos, ángulos de medida negativa o mayor de un ángulo giro, las funciones trigonométricas etc. Estos además de ser nuevos a los alumnos, presuponen el dominio de nociones previas indispensables a su comprensión. Esto puede ser una base de dificultad y errores que obstaculizan el aprendizaje de la trigonometría tanto en la asimilación de la teoría como en la resolución de problemas.

Los profesores de matemática y de otras áreas del conocimiento científico se encuentran con frecuencia frente a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras. Esto requiere una mayor atención por parte de las personas dedicadas a la investigación en el campo de la didáctica de la matemática y, sobre todo, exige el desarrollo de materiales didácticos y propuestas de aprendizaje actualizadas que respondan a estos cambios, actualizaciones en los documentos curriculares.

De todos modos, estos cambios o modificaciones curriculares no conducen a la solución del problema, generado por el proceso de enseñanza de la matemática, sino se toma en cuenta que el contenido de esta asignatura no solo debe proporcionar nociones al alumno, sino también, debe ser base para el desarrollo de su personalidad en todos los aspectos, desarrollando capacidades de razonamiento, capacidades lógicas y críticas (García Ruiz, 2012).

También es posible que el error provenga de una mala práctica docente, en este caso el error será indicativo de que algo no se está haciendo bien y pondrá al profesor en alerta para que este intente abordar desde otra perspectiva, utilizando otros ejemplos, etc. Esto hace que se perfeccione el proceso de enseñanza.

Los conceptos de esta disciplina son amplios y generalmente su enseñanza se da de manera mecánica y descontextualizada causando en el alumno un déficit en su aprendizaje, lo que supone que el alumno tenga dificultades en la aplicación de los conceptos adquiridos. Al dar a conocer nuevas teorías se generan nuevas dificultades (Medina, 2010).

Es evidente que frente a la problemática descrita, se hace necesaria una continua innovación didáctica, para que la enseñanza sea siempre más efectiva y los alumnos alcancen un aprendizaje significativo.

2.4 La presencia de la trigonometría en el currículo

Una de las finalidades de la educación, quizás la más evidente, es la de lograr que los estudiantes desarrollen la capacidad de saber actuar en un contexto particular, en función de un objetivo, y desarrollen la capacidad de dar solución a un problema que se les presente. Es decir que entre los fines de la educación resalta el reto que los adolescentes puedan realizar sus potencialidades como persona y aportar al desarrollo social. Es en este marco que el Ministerio de Educación, como una de sus políticas priorizadas, busca asegurar que: todos y todas logren aprendizajes de calidad con énfasis en comunicación, matemática, ciudadanía, ciencia, tecnología y productividad.

Para tal fin, el Proyecto Educativo Nacional establece la necesidad de transformar las instituciones de Educación Básica de manera tal que asegure una educación pertinente y de calidad; Los especialistas del Ministerio de Educación producen cada año nuevos documentos y nuevas herramientas para los docentes que seleccionan o se ponen en acción las diversas capacidades y recursos del entorno vivencial de los estudiantes.

En el ámbito de la matemática, nos enfrentamos al reto de desarrollar las competencias y capacidades en su relación con la vida cotidiana. Es decir, como un medio para comprender, analizar, describir, interpretar, explicar, tomar decisiones y dar respuesta a situaciones concretas, haciendo uso de conceptos, procedimientos y herramientas matemáticas.

En las "Rutas del aprendizaje" se formulan cuatro competencias matemáticas a partir de distintas situaciones que provienen del entorno inmediato o de experiencias cercanas y cotidianas a la vida de los estudiantes.

- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad.** Esta primera competencia implica que los estudiantes practiquen matemática mediante acciones orientadas a resolver problemas sobre números enteros, múltiplos y divisores, proporcionalidad directa e indirecta, fracciones y decimales en diferentes contextos, máximo común múltiplo y mínimo común divisor. Implica también que los estudiantes expresen formas de razonamiento basados en argumentar sobre experiencias con las variaciones porcentuales, los incrementos bajo condiciones de razón proporcional, regularidades relacionadas a exponentes positivos, así como las propiedades de las cuatro operaciones con fracciones y decimales.

- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.** Esta implica explorar el entorno y reconocer en él problemas referidos a situaciones de regularidad, equivalencia y cambio en los diferentes campos del arte, la economía, la física la biología. Estos campos permiten abordar la matemática mediante las transformaciones geométricas, las progresiones aritméticas y geométricas, las ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita, y funciones lineales. Implica también que los estudiantes expresen formas de razonamiento basados en argumentar experiencias para generalizar expresiones basadas en la progresión aritmética y geométrica, la igualdad y desigualdad, así como en las funciones.
- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma y movimiento.** Esta competencia implica que los estudiantes practiquen matemática mediante acciones orientadas a resolver problemas referidos a prismas, cilindros, polígonos, triángulos y cuadriláteros, así como la ubicación y medida de cuerpos en el plano. Estas acciones contribuyen al proceso de aprendizaje de la matemática, cuando el estudiante puede expresarlas en modelos matemáticos de tal forma que caracteriza los atributos de forma, localización y medida de formas bi y tridimensionales
- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones que requieren gestionar datos.** Esta implica que los estudiantes tengan la oportunidad de cuestionar su entorno, plantearse preguntas sobre su escuela, localidad y comunidad, de tal forma que puedan recoger, organizar y presentar datos relevantes que faciliten reconocer diferentes clases de estudio estadístico, así como, reconocer los tipos de inferencias incluyendo el papel que desempeña

la población y muestra, lo muestral y lo aleatorio en encuestas y experimentos, comprendiendo el significado de los datos cuantitativos y cualitativos, interpretando gráficos estadísticos basados en tablas de frecuencia para datos agrupados y no agrupados.

Por cada una de las competencias así planteadas, las “Rutas del aprendizaje” consideran seis capacidades matemáticas que permiten hacer más visible el desarrollo de la competencia matemática y trabajarla de forma integral.

- Matematiza situaciones
- Comunica
- Representa
- Elabora diversas estrategias para resolver problemas
- Utiliza expresiones simbólicas técnicas y formales
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas

Para poder trabajar más fácilmente estas seis capacidades se han agrupado en cuatro bloques.

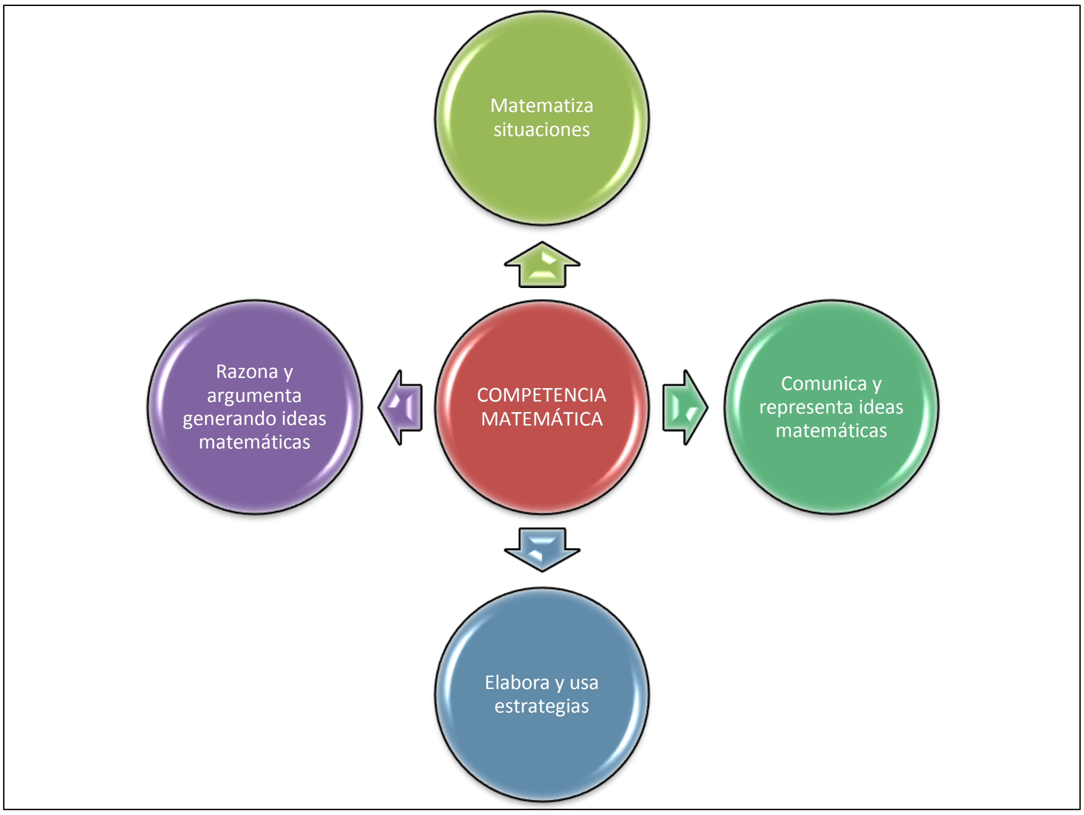


Fig. 1: *Modificada de "**Rutas del aprendizaje"**, Fascículo 1, Ministerio de Educación 2013*

Analizando en específico la presencia de la trigonometría en el currículo; este contenido se encuentra como componente importante de la tercera competencia matemática "Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización de cuerpos".

Las Rutas del aprendizaje, "área curricular matemática", versión 2015, correspondiente al ciclo VII tercero, cuarto y quinto grado de Educación Secundaria, prevé un estándar de aprendizaje que los alumnos deben lograr al concluir el séptimo ciclo de la EBR son:

- Relaciona datos de diferentes fuentes de información referidas a situaciones sobre formas, localización y desplazamiento de objetos, está bien expresado con modelos referidos a formas poligonales, cuerpos geométricos compuestos o de revolución, relaciones métricas, de semejanza y congruencia, y razones trigonométricas.

- Analiza los alcances y limitaciones del modelo usado, evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación.

- Expresa usando terminologías, reglas y convenciones matemáticas su comprensión sobre: relaciones entre las propiedades de figuras semejantes y congruentes, superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución, razones trigonométricas.

- Elabora y relacionar representaciones de una misma idea matemática usando mapas, planos, gráficos, recursos.

- Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas, procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; establecer relaciones de inclusión entre clases para clasificar formas geométricas; con apoyo de diversos recursos.

- Juzga la efectividad de la ejecución o modificación de su plan.

- Formula conjeturas sobre posibles generalizaciones estableciendo relaciones matemáticas; justifica sus conjeturas o las refuta basándose en argumentaciones que expliciten puntos de vista opuestos e incluyan conceptos y propiedades matemáticas (Ministerio de Educación, 2015).

2.5 El aprendizaje de la trigonometría a través de proyectos

En la enseñanza de las matemáticas hay que diferenciar entre dos niveles de aprendizaje: conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar en problemas reales y relacionar los conocimientos matemáticos a situaciones significativas es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no solo conocimientos técnicos (tales como realizar cálculos, resolver ecuaciones), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o una propiedad, aplicar un teorema u otro). Los problemas y ejercicios propuestos en los libros de texto y en una práctica docente tradicional solo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos, aprender mecánicamente una sucesión de pasos, cálculos sin desarrollar una capacidad crítica y un razonamiento lógico.

Para poder dar una respuesta concreta a esta problemática de la didáctica de la matemática, es importante proponer proyectos donde los conocimientos matemáticos, abstractos por naturaleza, son elevados a la práctica, proponiendo a los alumnos una aplicación de estos que promueva interés y expectativas en los alumnos mismos.

Al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes: ¿cuál es mi problema? ¿Cuáles datos conozco y cuales necesito descubrir? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Cuáles propiedades puedo aplicar? ¿Cuáles estrategias puedo utilizar? ¿Qué significa este resultado en la práctica? (Batanero & Diaz, 2011)

Los proyectos matemáticos aumentan la motivación de los estudiantes. No hay nada que haga más odiosa la matemática que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno repetir en forma mecánica un algoritmo.

La principal característica de un curso basado en proyectos es que el énfasis se da a las tareas y a las prácticas, que, al menos aproximadamente, deben ser realistas. Si los estudiantes trabajan la matemática y cualquiera de sus ramas por medio de proyectos se consigue varios puntos positivos.

Trabajando por ejemplo, los conceptos de trigonometría, a través de un proyecto que propone ponerlos en práctica, a través de experiencias experimentales, actividades de campo, relacionándolos a la labor real de una figura profesional, tal como el topógrafo, estos pueden ser contextualizados y se le da una mayor relevancia. Si los datos de un problema surgen de una situación real, son datos con significado. El problema se vuelve de interés para el alumno que se motiva a resolverlo. Los datos recogidos a través de los experimentos propuestos y los resultados obtenidos pueden ser verificados en la realidad, adquiriendo así la capacidad de interpretar de forma crítica y consciente las respuestas dadas frente a los problemas propuestos.

2.5.1 La topografía para el aprendizaje de la trigonometría

2.5.2 La topografía

Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría en la vida del hombre es la topografía que permite la medición de terrenos, el trazo de confines en estos, el monitoreo de movimientos, la realización de construcciones públicas y privadas y permite la representación gráfica del territorio, su relieve, la ubicación en este de elementos significativos etc.

La palabra topografía, etimológicamente, se divide en dos raíces: topo = lugar y grafos = signos. Esta disciplina permite la medición de áreas, distancias, desniveles, también entre puntos inaccesibles. Por ejemplo utilizando un teodolito, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten a través de triangulaciones y aplicando las razones trigonométricas, hallar indirectamente y con gran precisión distancias, alturas, etc. (Alonso Borrego, Cabezón Ochoa, & al., 2008).

Las primeras nociones de la topografía nacen en los tiempos de Thales de Mileto y Anaximandro de quienes se conocen las primeras cartas geográficas, a las cuales se añaden los estudios de: Erastógenes, Hiparco y Plinio, siendo de esta forma los fundadores de la topografía. Posteriormente en el siglo XIII se descubren nuevas aplicaciones a la topografía, así, a través del tiempo la práctica topográfica toma connotaciones más científicas y especializadas logrando un papel importante en muchas técnicas.

2.5.3 La práctica topográfica para aprender la trigonometría

Muchas veces la enseñanza de la trigonometría es impartida de manera abstracta y teórica dentro de las aulas, provocando que los alumnos no asimilen los conceptos de manera eficaz, por este motivo se propone el proyecto pedagógico, “El aprendiz topógrafo” el cual se basa en actividades topográficas practicadas en los contextos reales del alumno.

El problema de la medición del terreno tanto en planta como en alzado se ha reducido desde siempre a la resolución de triángulos, como polígono elemental a partir del que podemos formar los demás polígonos (Navarro Hudiel, 2008).

Efectivamente, la medición y representación de terrenos, necesaria para una infinidad de aplicaciones en la vida del hombre, presenta un problema que sobresale desde un primer acercamiento al tema. No existe un terreno que tenga forma de un polígono conocido. En la realidad aparece evidente que los terrenos presentan formas irregulares, uno diferente de otro y con una gran variabilidad. Para poder medir estos terrenos es necesario descomponerlos en triángulos y resolver cada uno de ellos; llegando de esta manera a la resolución práctica de un polígono cualquiera.

Por lo tanto, la resolución de problemas que derivan de la práctica de actividades topográficas, implica el manejo de estrategias, el reconocimiento de propiedades y la puesta en relación de diferentes conceptos y esto es sin duda un factor que impulsa el aprendizaje significativo de la trigonometría.

En este trabajo de investigación se propone una unidad didáctica para la enseñanza de la trigonometría en el curso de matemática con alumnos del 5° grado de Educación Secundaria, que pretende alcanzar un aprendizaje significativo a través de un conjunto de actividades teóricas y experimentales poniendo los conocimientos trigonométricos en la práctica topográfica.

Las actividades que se proponen en este trabajo se han desarrollado tanto adentro del aula como al aire libre. En el desarrollo de estas se han utilizado materiales de fáciles alcances y se han construido unos instrumentos rudimentales para la medición de ángulos tanto horizontales (Hipsómetro casero) como verticales (Clinómetro casero). Cada una de las actividades se relaciona a contenidos específicos. Así, por ejemplo, se propone aprender el teorema de Thales y la semejanza entre triángulos a través de un experimento real, la medición indirecta de una altura, utilizando un espejo y una cinta métrica.

También se propone aprender y poner en práctica a través de distintas actividades la orientación de los ángulos relacionando este contenido con los sistemas de coordenadas polares, las relaciones trigonométricas de los triángulos rectángulos, las leyes del seno y del coseno a través de juegos, levantamientos topográficos, mediciones indirectas etc.

2.6 El aprendizaje

2.6.1 Tipos de aprendizaje significativo

Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo: de representaciones, de conceptos y de proposiciones.

- Aprendizaje de representaciones

Es el aprendizaje más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, al respecto Ausubel dice:

Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan (Ausubel, 1976).

Este tipo de aprendizaje se presenta generalmente en los niños, por ejemplo, el aprendizaje de la palabra "pelota", ocurre cuando el significado de esa palabra pasa a representar, o se convierte en equivalente para la pelota que el niño está percibiendo en ese momento, por consiguiente, significan la misma cosa para él; no se trata de una simple asociación entre el símbolo y el objeto sino que el niño los relaciona de manera relativamente sustantiva y no arbitraria, como una equivalencia representacional con los contenidos relevantes existentes en su estructura cognitiva.

- ***Aprendizaje de conceptos***

Los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que se poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos" (Ausubel, 1976), partiendo de ello podemos afirmar que en cierta forma este tipo de aprendizaje también es un aprendizaje de representaciones.

Los conceptos son adquiridos a través de dos procesos. Formación y asimilación. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis, del ejemplo anterior podemos decir que el niño adquiere el significado genérico de la palabra "pelota", ese símbolo sirve también como significante para el concepto cultural "pelota", en este caso se establece una equivalencia entre el símbolo y sus atributos de criterios comunes. De allí que los niños aprendan el concepto de "pelota" a través de varios encuentros con su pelota y las de otros niños.

El aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que el niño amplía su vocabulario, pues los atributos de criterio de los conceptos se pueden definir usando las combinaciones disponibles en la estructura cognitiva por ello el niño podrá distinguir distintos colores, tamaños y afirmar que se trata de una "pelota", cuando vea otras en cualquier momento.

- Aprendizaje de proposiciones

Este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones.

El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e idiosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición (García Ruiz, 2012).

III. PROPUESTA DIDÁCTICA“EL APRENDIZ TOPÓGRAFO”

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo promover el aprendizaje de los contenidos curriculares de la trigonometría a partir de los recursos estratégicos que favorecen las habilidades y capacidades en la construcción significativa de los conocimientos matemáticos y en particular la habilidad de resolver problemas que incluyen contenidos trigonométricos.

La finalidad de la matemática en el currículo es desarrollar formas de actuar y pensar matemáticamente en diversas situaciones. Por ello, en el proceso de enseñanza y aprendizaje tenemos que ir más allá de los fundamentos teóricos de la matemática y de la práctica exclusiva de tareas matemáticas. Es necesario entender que aprender a pensar y actuar matemáticamente es aproximarnos a todas las formas posibles de razonar, formular hipótesis, demostrar, construir, organizar, comunicar, resolver problemas matemáticos que provienen de un contexto cotidiano, social, laboral o científico, entre otros (Guerrero Ortiz, 2013).

En este contexto se ha presentado una propuesta pedagógica que ha sido aplicada y experimentada en la Institución Educativa N° 86378 “Santa Rosa” en el centro poblado de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash. Con esta se ha pretendido diseñar estrategias didácticas que puedan ser aplicadas a las instituciones educativas operantes en las diferentes áreas rurales del país y que, a través del empleo de talleres matemáticos y materiales concretos, puedan facilitar el alcance de un aprendizaje significativo del concepto de la trigonometría en sus diferentes aplicaciones y representaciones (Guerrero Ortiz, 2013).

La propuesta pedagógica consta con actividades dentro del aula y actividades al aire libre, en las cuales los estudiantes aplican sus aprendizajes poniéndolos en práctica para dar solución a problemas reales. También se desarrollan actividades individuales y grupales, en las cuales los alumnos, además de aprender por descubrimiento y hacer experiencia de las nociones matemáticas, adquieren también un aprendizaje de tipo cooperativo, desarrollando las capacidades de relación y comunicación entre compañeros.

3.1 Contenidos curriculares

La propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo" abarca contenidos curriculares inherentes a la tercera competencia matemática planteada por las "Rutas del aprendizaje", Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización de cuerpos. Los estándares establecidos por las rutas en el tema de la trigonometría prevén que los estudiantes, al concluir el VII ciclo de la EBR puedan:

- Presentar ejemplos de razones trigonométricas con ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios en situaciones de distancias inaccesibles, ubicación de cuerpos y otros.
- Seleccionar la estrategia más conveniente para resolver problemas que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios.
- Plantear conjeturas al demostrar el teorema de Pitágoras.

La propuesta didáctica que acompaña el presente trabajo de investigación amplía y eleva estos estándares promoviendo la concreción de los conceptos trigonométricos a través de la práctica topográfica. De esta manera el taller matemático "El aprendiz topógrafo" plantea estándares específicos para complementar los establecidos por las "Rutas del aprendizaje". Así se propone lograr que los estudiantes al concluir el taller matemático puedan:

- interpretar las representaciones gráficas y elaborar estrategias para la resolución de problemas que involucran los triángulos, las semejanzas entre los triángulos y el teorema de Pitágoras.
- diferenciar y usar modelos basados en semejanza, congruencia y relaciones de medida entre ángulos.
- matematizar situaciones reales y problemáticas aplicando conceptos trigonométricos.
- contrastar modelos basados en relaciones métricas, razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras al vincularlos a situaciones concretas.
- seleccionar la estrategia más conveniente para resolver problemas que involucran triángulos oblicuángulos.

Para alcanzar los estándares de aprendizaje establecidos por los documentos curriculares es conveniente que los estudiantes se enfrenten a situaciones problemáticas próximas a la realidad o que puedan captar su interés. Estas permiten construir significados, organizar objetos matemáticos y generar nuevos aprendizajes en un sentido constructivo y creador de la actividad humana (Guerrero Ortiz, 2013).

Esto involucra crear unos escenarios que impulsen en los estudiantes la curiosidad de experimentar, practicar, elaborar diferentes estrategias de resolución y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos.

Siguiendo esta perspectiva, la presente investigación propone una unidad didáctica que desarrolla en forma progresiva los conceptos de la trigonometría por medio del taller matemático "El Aprendiz Topógrafo", el cual presenta un conjunto de actividades de campo, mediante las cuales el estudiante logra adquirir, construir y practicar conceptos trigonométricos.

3.2 Clasificación de las actividades

Las actividades elaboradas en el taller matemático "El Aprendiz Topógrafo "son propuestas didácticas que pueden ser utilizadas, en su conjunto como también singularmente, para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos básicos de la trigonometría con los alumnos del quinto grado de Educación Secundaria. Estas son fruto de una diversificación de los contenidos curriculares contextualizados a la realidad de las instituciones educativas que operan en las áreas rurales del país con la finalidad de diseñar una herramienta útil para los docentes y sobre todo para los alumnos que allí se desempeñan.

Las actividades propuestas desarrollan progresivamente cada uno de los contenidos trigonométricos considerados, entrelazando los nuevos saberes con los conocimientos ya adquiridos para ayudar a los estudiantes a construir su estructura conceptual relacionando todos sus conocimientos alternando clases teóricas, ejercicios y talleres prácticos.

La propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo" empieza con un reforzamiento de los conceptos que deberían hacer parte de los saberes previos de los alumnos que ingresan al quinto grado de secundaria, conceptos que resultan ser propedéuticos para poder enfrentar el estudio de la trigonometría; así se vuelven a explorar los conceptos de ángulos, su medición, los diferentes sistemas angulares; el triángulo como elemento fundamental de la trigonometría, su clasificación, sus características y propiedades, para poder generar en los estudiantes una base sólida en la cual levantar los nuevos conocimientos. Terminada la primera fase de repaso, las actividades propuestas conducen al estudiante a descubrir las nociones de seno, coseno tangente y cotangente, las relaciones que se establecen entre estas, sus aplicaciones en la resolución de problemas, las leyes del seno y la del coseno para la resolución de cualquier triángulo.

Algunas de estas actividades se desarrollan en forma grupal, implicando de esta manera un aprendizaje cooperativo, otras son desarrolladas en forma individual para que el estudiante pueda comprobar sus capacidades y el nivel de su aprendizaje.

En los talleres que se presentan en esta investigación se propone la exploración, el uso y, en algunos casos la construcción de materiales concretos, para poder ayudar los estudiantes a elevar sus aprendizajes a un nivel de concreción y proporcionarles la capacidad de utilizarlos en la resolución de problemas reales. Los materiales empleados son todos de fácil alcance, esto para permitir que la propuesta didáctica pueda volverse a aplicar en diferentes contextos. Estos materiales son una huincha métrica, una brújula, un espejo, un transportador de ángulos, un juego de escuadras y un cuaderno de apuntes, que a lo largo de las actividades llamaremos "Cuaderno de campaña". Otros materiales utilizados en los talleres como el "Clinómetro casero" son el producto de actividades manuales de los mismos estudiantes y del docente.

La propuesta didáctica “El aprendiz topógrafo” se ha organizado en nueve actividades o talleres relacionados a la actividad laboral del topógrafo.

TABLA 3

Tabla matriz de conocimientos y capacidades

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS	HORAS PEDAGÓGICAS	CAPACIDADES
La medición de alturas con el espejo	Los triángulos	2h	• Matematiza situaciones • Comunica y representa ideas matemáticas • Elabora y usa estrategias • Razona y argumenta generando ideas matemáticas
Construcción del clinómetro casero	Los ángulos	2h	
Midiendo la inclinación de las calles	Los ángulos	2h	
Midiendo los ángulos	Los ángulos, sistema de conversiones	2h	
Itinerario de ángulos	Ángulos orientados	2h	
Realizando los trazos	Ángulos orientados sistema de coordenadas polares	2h	
Midiendo alturas con el clinómetro	Razones trigonométricas seno, coseno, tangente y cotangente	2h	
Midiendo la distancia horizontal	Razones trigonométricas de ángulos agudos	2h	
Levantamiento de un plano	Resolución de triángulos oblicuángulos	2h	

3.2.1 "La medición de alturas con el espejo"

El desarrollo de esta actividad ayuda al estudiante a comprender los conceptos de la semejanza de triángulos y la capacidad de calcular las longitudes de sus lados.

Especificadamente este taller propone trabajar con triángulos rectángulos semejantes para poder determinar la longitud de un cateto desconocido.

Con esta actividad los estudiantes aprenden un método práctico para medir la altura de algún elemento no accesible a la medición directa, como la altura de un edificio o de una estatua, solamente con el auxilio de un espejo y de una huincha métrica.

TABLA 4

La medición de alturas con el espejo

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Medición de alturas inaccesibles
Contenidos relacionados	Triángulos semejantes Teorema de Thales Triángulos rectángulos Proporcionalidad directa
Materiales y recursos	Cuaderno de campaña "El aprendiz topógrafo" Regla y lápiz Espejo y huincha métrica Cuaderno de trabajo "El aprendiz topógrafo"

Procedimiento:

Esta actividad se divide en tres tiempos, un primer momento en el aula donde el docente presenta y explica los pasos que se realizarán, la finalidad del trabajo y las normas comportamentales que cada estudiante debe respetar, un segundo momento en el patío de la institución, en el cual los estudiantes, acompañados por el docente, realizan la medición

- El docente organiza todos los estudiantes en grupos de tres, cuatro integrantes. Cada grupo de estudiantes elige un observador que será quien realiza el experimento.

- Cada grupo mide la altura de los ojos del observador apuntando la medida en el cuaderno de campaña.
- Cada estudiante en su cuaderno de campaña realiza un croquis donde representa las posiciones del mástil, del espejo y del observador.
- En un espejo plano se realiza una pequeña marca con un plumón indeleble de punta fina.
- Se coloca el espejo en el piso a una determinada distancia de la base del mástil presente en todos los colegios, en la línea imaginaria que une los pies del observador con la base del objeto a medir.
- El observador se desplaza a lo largo de la recta pasante por el espejo y la base del mástil, hasta que la punta de este, quede reflejada en el espejo, y coincida con la marca. Ahora la punta del mástil, su base y la marca en el espejo forman un triángulo semejante a lo formado por los ojos del observador, sus pies y la pequeña marca en el espejo.
- Los integrantes del grupo miden la distancia entre los pies del observador y la marca del espejo y anotan todo en el cuaderno de campaña.
- Un tercer momento que concluye la actividad, en el aula, donde los alumnos resuelven la situación generada durante la medición determinando la altura que se quería calcular. Para esto se aplica la semejanza de los triángulos:

$$\text{Altura del mástil} = \frac{\text{Altura de los ojos}}{\text{Distancia entre el observador y el espejo}} \times \text{Distancia entre el espejo y la base del mástil}$$

Los diferentes grupos comparten sus resultados y comparan sus procedimientos.

3.2.2 "Construcción del clinómetro"

Con esta actividad los estudiantes construyen un instrumento que luego será empleado en el desarrollo de otras actividades. Este ejercicio no es una actividad de puras manualidades o de creatividad sino que abarca y enfrenta contenidos matemáticos. Para construir el clinómetro casero el estudiante se enfrentará con el trazo y la realización de un transportador que permita medir las inclinaciones de los ángulos de elevación y de depresión.

TABLA 5

Construcción del "Clinómetro casero"

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Construcción de un instrumento topográfico casero para medir inclinaciones
Contenidos relacionados	Los ángulos y su medida
Materiales y recursos	Cartón, o tripley Cuerda y pesa Clavo y escarpias Regla, compás y transportador Tijera Cuaderno de trabajo "El aprendiz topógrafo"

Esta actividad se desarrolla como un trabajo grupal que los alumnos realizan en la casa. El docente en el aula presenta el clinómetro casero, expone sobre su uso y sus características. Luego da a los estudiantes indicación de las pautas que deben seguir para la construcción del clinómetro, indicaciones que los alumnos pueden encontrar también en el cuaderno de trabajo "El aprendiz topógrafo".

- Buscar una pieza rectangular de cartón o tripley de unos 12 x 32cm.
- Recortar un área rectangular con el fin de colocar la mano.
- Colocar dos escarpias redondas en los extremos de la parte superior.

- Diseñar un cuadrante con los ángulos indicados, el cero en el medio, los ángulos de elevación en la parte interna mientras los ángulos de depresión en la parte externa.
- Poner un clavo al centro del cuadrante y atar cuerda al cuyo extremo se colocará un pequeño peso.

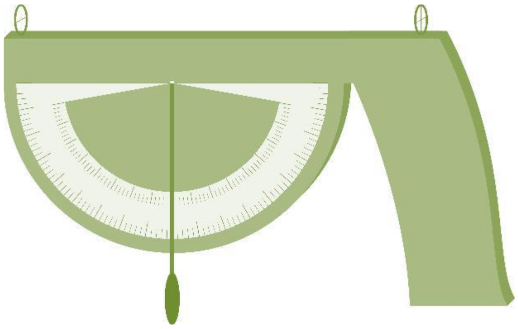


Fig. 2: *clinómetro casero*

Cada grupo realizará en el aula una breve presentación del clinómetro, explicando los pasos realizados, el sistema de medida de los ángulos adoptado, el uso de este instrumento.

3.2.3 "Midiendo la inclinación de las calles con el clinómetro"

El clinómetro es un instrumento topográfico con el cual se puede determinar la inclinación de un determinado plano y línea recta, la plataforma de una carretera, la superficie de un terreno o de un talud, el trazo de un canal etc.

Los topógrafos utilizan este instrumento para medir inclinaciones o para buscar los puntos de un trazo con una inclinación dada.

En esta actividad los estudiantes dan uso al instrumento topográfico, clinómetro casero, que ha sido construido por ellos mismos en la actividad anterior. Al medir los diferentes ángulos de inclinación que presentan las calles de su localidad, los estudiantes asimilan y ponen en práctica de manera sencilla el concepto y la clasificación de los ángulos, presentes en un contexto real.

TABLA 6

Midiendo la inclinación de las calles con el "Clinómetro casero"

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Medir la inclinación de las calles
Contenidos relacionados	Los ángulos Ángulos de elevación Ángulos de depresión
Materiales y recursos	El clinómetro Varilla Lápiz Cuaderno de campaña "El aprendiz topógrafo" Cuaderno de trabajo "El aprendiz topógrafo"

El docente para desarrollar esta actividad forma grupos de trabajo, a los cuales se les explica dentro del salón de manera general, sobre el trabajo que llevarán a cabo. A continuación el docente saca a los grupos ala calle, cercana a la institución y explica pasos que deben seguir los.

- se fija el tramo de la calle que se va a medir.
- cada grupo hace un croquis de la calle en el cuaderno de campaña.
- cada grupo escoge dos estudiantes, uno que observe con el clinómetro y el otro que pueda sostener la varilla, mira.
- se gradúa la varilla hasta los ojos del observador.
- se pone un punto de referencia donde se ubica el observador con el clinómetro y el ayudante se ubica con la varilla en el segundo punto establecido en la calle.
- para determinar la inclinación de la calle el observador debe apuntar con la mira del clinómetro a la parte central superior de la varilla.

- se anota en el cuaderno de campaña el ángulo que marca el clinómetro, así se obtiene la inclinación de la calle.
- en el salón cada grupo representa gráficamente los ángulos de todas las calles.

3.2.4 "Midiendo los ángulos"

El desarrollo de esta actividad ayuda al estudiante a trabajar con los conceptos de los ángulos orientados. De esta manera al dar una orientación a los ángulos, el estudiante podrá entender y explicar con facilidad el concepto abstracto de los ángulos orientados que generalmente de una manera lógica es difícil de entender.

Con esta actividad los estudiantes aprenden un método práctico para medir la distancia angular de dos puntos al horizonte a partir de un punto establecido en el eje polar, como la amplitud de un edificio y de una estatua, en un árbol y de un cerro, solamente con el auxilio de una brújula. Además, esta misma actividad ayuda al estudiante a representar un mismo ángulo en diferentes sistemas de medidas, usando así el sistema de conversiones angulares.

TABLA 7
"Midiendo los ángulos"

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Medir el ángulo entre dos puntos
Contenidos relacionados	Los ángulos Sistema de medidas angulares
Materiales y recursos	Lápiz y borrador Regla Brújula Cuaderno de campaña "El aprendiz topógrafo" Cuaderno de trabajo "El aprendiz topógrafo"

La actividad se desarrolla en tres momentos, el primer momento se realiza dentro del salón en el cual el docente forma grupos de trabajo y explica cómo utilizar el instrumento topográfico, de la brújula.

La brújula es un instrumento que sirve para orientarse determinando la dirección del norte magnético terrestre.

¿Cómo se utiliza?

En el cuadrante de la brújula hay una aguja que se orienta siempre indicando el norte; apuntando con la mira de la brújula un punto al horizonte se puede leer el ángulo que la dirección de la mira forma con la dirección del norte. Repitiendo la misma operación apuntando a un segundo punto, la diferencia de los ángulos nos indica la distancia angular entre los dos puntos.

α (distancia horizontal) = lectura 1 – lectura 2

En el segundo momento cada grupo junto con el docente sale al patio de la institución a realizar la actividad siguiendo los siguientes pasos:

- cada grupo escoge dos puntos al horizonte los cuales desea medir la distancia angular y un punto de estación en el patio.
- cada grupo, realiza en el cuaderno de campaña un croquis del punto de estación y de los dos puntos establecidos para la medición.
- el estudiante que realiza la observación se posiciona en el punto de estación, luego apunta con la mira de la brújula el primer punto, lee el ángulo formado entre la línea de mira y el norte.
- el observador repite la misma operación para el segundo punto.
- el estudiante que desarrolla el papel de ayudante, escribe los datos obtenidos en el cuaderno de campaña y calcula la distancia angular,

utilizando la formula dada por el docente en el primer momento de la actividad.

- cada grupo repite varias veces este proceso, midiendo la distancia angular de diferentes parejas de puntos indicadas por el docente, así cada integrante del grupo puede experimentar el uso de este instrumento.

En el tercer momento los grupos ingresan al salón, el docente pide a cada grupo representar gráficamente la actividad desarrollada y expresar los ángulos en los tres sistemas de medidas angulares.

3.2.5 "Itinerario de los ángulos"

La actividad se desarrolla dentro del aula; "Itinerario de los ángulos" es un juego que relaciona los conceptos de los ángulos orientados y de las coordenadas polares.

Al jugar este juego los estudiantes desarrollan la capacidad de reconocer la orientación de los diferentes ángulos y sobre todo de cómo representar un punto en el plano a partir de las coordenadas polares. De esta manera, el desarrollo de este juego ayuda al estudiante a tener un panorama sobre cómo dar una ubicación exacta de un terreno a partir de un conjunto de puntos y luego representarlo en un mapa, utilizando instrumentos concretos como la regla y el transportador.

TABLA 8

Itinerario de los ángulos

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Ubicar las coordenadas polares en el mapa
Contenidos relacionados	Ángulos orientados

Materiales y recursos	Un mapa Regla Transportador Lápices de colores y Borrador

Para desarrollar el juego, el docente forma cuatro grupos, los cuales deben seguir las siguientes indicaciones.

- Cada grupo dispone de un mapa a gran escala, el mismo para todos, donde está indicada claramente la orientación.
- El jefe del juego indica un lugar sobre el mapa que servirá como punto de partida.
- El grupo clava un alfiler en el punto de partida (es conveniente proteger al mapa de las miradas vecinas). Seguidamente el jefe del juego indica las siguientes coordenadas polares.

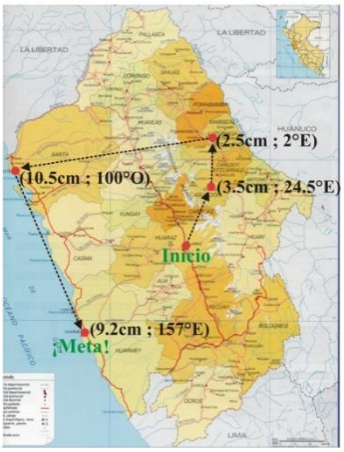


Fig. 3: *mapa topográfico*

- Cada grupo clava otro alfiler en el lugar que cree correspondiente según las indicaciones que dio el jefe del juego.
- En el último lugar indicado, el jefe de juego anuncia ¡meta!, cada equipo de juego muestra su mapa.
- Se comparan los resultados obtenidos por cada equipo, dando un punto negativo por cada error cometido.

- Finalmente gana el juego el equipo que ha cometido menos errores.

3.2.6 "Realizando trazos"

Al efectuar esta actividad el estudiante mejora sus capacidades de orientación sobre los cuatro puntos cardinales, esto le lleva a representar el área de un determinado espacio en un plano, logrando así resolver problemas relacionados con los conceptos de los sistemas de coordenadas polares.

A medida que se va desarrollando esta actividad cada estudiante va entendiendo la forma de trabajar que tienen los topógrafos y se da cuenta que los conceptos utilizados por un topógrafo son los mismos que se utilizan en este taller matemático.

TABLA 9

Realizando trazos

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Representación en un plano el patio del colegio
Contenidos relacionados	Ángulos orientados Sistema de coordenadas polares
Materiales y recursos	Cuaderno de campaña "El aprendiz topógrafo" Lápiz y borrador Transportador horizontal Huincha métrica

Para desarrollar esta actividad el docente agrupa a los estudiantes en equipos de trabajo y da algunas normas de convivencia que ayudarán durante el desarrollo de la actividad. La actividad comienza con la explicación del docente en el aula, la importancia de descomponer cualquier figura geométrica en triángulos, luego de ello se sale al patio de la institución donde se les da las siguientes indicaciones.

- dibujar en el cuaderno de campaña un croquis del patio del colegio, definiendo los puntos del contorno que se van a medir y el punto que representará el azimut.
- elegir en el patio un lugar del cual se pueda observar todos los puntos significativos (esquinas). Está será el punto de estación.
- elegir un punto firme para determinar el eje polar, si utilizan la brújula, este será la dirección del norte magnético.
- situar el cero del marcador del transportador con el eje polar, luego apuntar el punto que se quiere medir; el ayudante anota en el cuaderno de campaña el ángulo formado entre el eje polar y el segundo punto.
- medir con la huincha la distancia del eje polar, que sería el primer punto y el segundo punto, formando así un triángulo con los tres lados conocidos.
- este procedimiento se realiza por todos los puntos establecidos en el contorno del patio de la institución, de esta manera queda representado el área del patio descompuesto en triángulos con los tres lados conocidos.
- acabado el trabajo de medición, representar el área del patio y compararlo con los demás equipos.

3.2.7 "Midiendo alturas con el clinómetro"

Con esta actividad el estudiante pone en práctica los conceptos adquiridos en la clase, sobre todo la capacidad de resolver problemas propuestos de la vida real, como calcular alturas a partir de los triángulos rectángulos, aplicando las razones trigonométricas, en particular, la tangente. Con la ayuda del instrumento topográfico, el clinómetro casero.

El clinómetro casero, además de ayudar en la medición de la inclinación de un terreno, carretera, canal etc., o del trazo de una determinada inclinación, resulta ser útil también en la medición de alturas de objetos que no se pueden medir de manera directa. Con este rudimental instrumento podemos medir la altura del mástil, el techo de la institución o el campanario del pueblo. Así, al desarrollar este taller matemático el estudiante emplea los conocimientos adquiridos en clase, para poder realizar mediciones de forma indirecta.

TABLA 10

Midiendo alturas con el clinómetro

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Medición de alturas inaccesibles
Contenidos relacionados	Razones trigonométricas de ángulos agudos Razones trigonométricas de ángulos complementarios
Materiales y recursos	Cuaderno de campaña “El aprendiz topógrafo” Lápiz y borrador El clinómetro casero Huincha métrica

Los estudiantes del quinto grado, en compañía del docente, realizan la medición indirecta del mástil de la institución, para lo cual forma equipos de trabajo de tres o cuatro integrantes. El explica de manera general los pasos que se necesitan para realizar la actividad. El docente invita a los estudiantes a salir al patio para dar las siguientes indicaciones.

- Fijar el punto de estación a una distancia determinada de la base del mástil o de cualquier objeto que se desea medir, esta es la distancia horizontal.
- Cada grupo en su cuaderno de campaña, realizan un croquis del mástil hasta el punto de estación, formando así un triángulo rectángulo.

- Escoger a un integrante del equipo como el observador, del cual se mide la altura desde los pies hasta los ojos.

- El observador, una vez ubicado en el punto de estación, mira con el clinómetro la cúspide del asta o de la infraestructura que se desea medir.

- Otro integrante del grupo lee el ángulo que muestra el clinómetro y lo anota en el cuaderno de campaña.

- Medir la distancia horizontal, desde la base del mástil hasta el punto de estación.

- Para realizar el cálculo ubicar los datos obtenidos en el triángulo, de esta manera obtener un triángulo rectángulo, del cual se conoce el ángulo y su lado adyacente; para calcular la altura del triángulo es necesario desarrollar la siguiente operación:

- *Altura =lado adyacente al ángulo* x*t gα.*

- Para determinar la altura del asta, se suma la altura del observador, obtenido en el paso anterior, más la altura del triángulo. Otra forma de calcular la altura del asta es la siguiente:

- *La altura del asta = altura de los ojos del observador + distancia horizontal* x*t gα.*

3.2.8 "Midiendo la distancia horizontal"

Con el siguiente taller matemático el estudiante desarrolla la capacidad de aplicar los conceptos del seno y el coseno, en situaciones reales y significativas; realizando de esta manera ya un trabajo topográfico.

El topógrafo utiliza muy a menudo las definiciones del seno, coseno y las demás razones trigonométricas de los triángulos rectángulos, para calcular distancias y alturas que no se pueden medir de forma directa, estos mismos conceptos y forma trabajo utiliza el estudiante para desarrollar este taller.

TABLA 11

Midiendo la distancia horizontal

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Resolución de triángulos rectángulos
Contenidos relacionados	El seno El coseno
Materiales y recursos	Cuaderno de campaña “El aprendiz topógrafo” El clinómetro casero Huincha métrica Regla, lápiz y borrador

Para el desarrollo de la actividad el docente forma equipos de trabajo, luego explica la importancia y el porqué del taller matemático, el cual toma significancia en como calcular las distancias horizontales de los terrenos con fuertes desniveles.

Después de la introducción del taller, el docente juntamente con los estudiantes sale al patio de la institución para medir la inclinación de un espacio determinado, para lo cual deben seguir los siguientes pasos:

- Determinar el terreno del cual se desea medir la distancia horizontal.
- Realiza en el cuaderno de campaña un diseño del terreno, como se indica en la siguiente grafica:

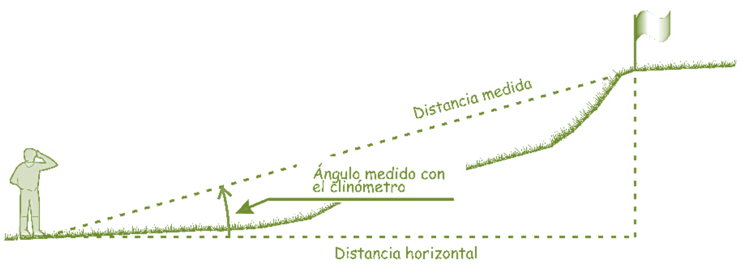


Fig. 4: *distancia horizontal*

- Graduar la varilla a la altura de los ojos del observador.
- Ubicar los puntos; en el primer punto se ubica el observador con el clinómetro casero y en el segundo punto se posiciona la varilla.
- El observador con el clinómetro apunta la parte superior y central dela varilla, mientras el ayudante lee el ángulo que este indica y anota en el cuaderno de campaña.
- Se mide la distancia entre el primer punto y segundo punto.
- Ubicar los datos obtenidos en el croquis, obteniendo de esta manera un triángulo rectángulo con los siguientes datos: hipotenusa y ángulo adyacente a la distancia horizontal.
- Para estimar la línea horizontal, hacemos la siguiente operación:
- $Horizontal = \cos\boldsymbol{\alpha} \times hipotenusa$
- En el salón, cada grupo representa gráficamente la actividad realizada.

3.2.9 "Levantamiento de un plano"

Al desarrollar este taller matemático, el estudiante pone en práctica todos los conocimientos que ha adquirido en todo el proceso de aprendizaje. Cada estudiante es capaz de relacionar los conceptos de la trigonometría con la topografía, que le permite realizar la medición de terrenos, realizar construcciones y sobre todo le permite la representación gráfica de un determinado territorio.

TABLA 12

Levantamiento de un plano

Tiempo	2 horas pedagógicas
Situación problemática	Elaboración de un plano

Contenidos relacionados	Resolución de triángulos oblicuángulos Teorema del seno y del coseno Razones trigonométricas
Materiales y recursos	Cuaderno de campaña “El aprendiz topógrafo” Lápiz y borrador Huincha Clavos Cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”

Para desarrollar esta actividad el docente forma grupos de trabajo, la tarea de cada grupo es representar el plano del patio de la institución educativa y determinar el área y perímetro del mismo en un papelote, para lo cual cada grupo debe seguir las indicaciones del docente.

- Elaborar un croquis del patio de la institución en el cuaderno de campaña.
- Fijar un punto fijo con un clavo (debe ser un lugar adecuado para ver todo el perímetro del patio), de donde se hace las mediciones con la huincha, luego se pone otros puntos a los extremos del patio (en el perímetro).
- Medir las distancias entre el punto fijo y el primer punto establecido en el perímetro, luego el punto fijo y el segundo punto establecido en el perímetro, por último, entre el primer y el segundo puntoen el perímetro. Formando así un triángulo con los tres lados conocidos.
- Anotar todos los datos (la medida de los lados), en el cuaderno de campaña.
- Hacer la misma operación para todos los puntos sucesivos del perímetro del patio.
- Se observa que, el patio de la institución educativa está descompuesto en varios triángulos, todos con los tres lados conocidos.

- Representar gráficamente el patio en un plano con todas las medidas respectivas (el perímetro del patio debe ser trazado con una línea continua y los triángulos que en estos forman se traza con líneas interrumpidas).
- Para determinar el área total del patio, primero se calcula el área de cada triángulo y luego se realiza la suma de todas las áreas obtenidas.

IV. METODOLOGÍA

El presente trabajo de investigación es de tipo cuantitativo; de nivel explicativo y correlacional.

4.1 Diseño de la investigación

El diseño de este trabajo de investigación es experimental, de tipo pre-experimental, y se diagrama de la siguiente manera:

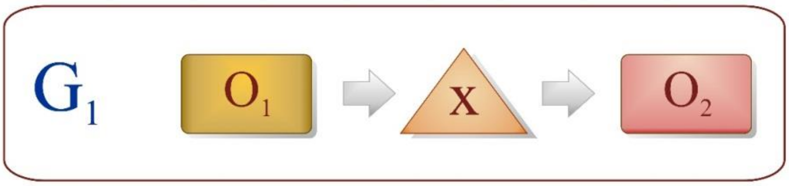


Fig. 5: *diseño del experimento*

G: Estudiantes del quinto grado de la institución educativa "Santa Rosa de Uchusquillo"

O1: Aplicación del pre-test para evaluar el nivel de conocimientos inicial de los componentes del grupo experimental.

X: Aplicación de la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo"; para desarrollar los contenidos trigonométricos.

O2: Aplicación del post-test para evaluar los efectos del tratamiento y relacionar las variables.

4.2 Universo y población

4.2.1 Universo de investigación

Son los estudiantes de las Instituciones Educativas del Nivel de Educación Secundaria.de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald.

4.2.2 Población de investigación

La población de la presente investigación está formada por los estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria de las Instituciones Educativas que operan en el territorio de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald.

4.2.3 Muestra de la investigación

La muestra de la investigación está conformada por el grupo experimental, los 15 estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo.

TABLA 13

composición del grupo experimental

GRADO	*SECCIÓN*	*N° DE ALUMNOS*	
5º	*"ÚNICA"*	*VARONES*	*MUJERES*
		10	5
		PORCENTAJE	
		66.67%	33.33%

4.3 Técnicas e instrumentos

4.3.1 Definición y operacionalización de las variables.

Las variables se diversifican de la siguiente manera:

- Variable independiente: realización del taller matemático "El Aprendiz topógrafo"
- Variable dependiente: aprendizaje significativo de las nociones trigonométricas

En la tabla 2 se presentan las dimensiones, sub-dimensiones y los indicadores de la variable dependiente utilizados para la evaluación.

La variable dependiente se ha organizado en cuatro dimensiones que abarcan todos los contenidos previstos en el currículo para la enseñanza de la trigonometría. Las dos primeras dimensiones comprenden a los conocimientos básicos de la geometría, ángulos y triángulos, Y las dos últimas dimensiones corresponden a los conocimientos básicos de la trigonometría, razones trigonométricas y resolución de triángulos genéricos.

Estas dimensiones están divididas en cuatro sub-dimensiones que representan las capacidades matemáticas definidas por el Ministerio de Educación en las "Rutas del aprendizaje":

- Matematiza situaciones
- Comunica y representa ideas matemáticas
- Elabora y usa estrategias
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas

A estas sub-dimensiones se han asignado un número variado de indicadores.

TABLA14

Operalización de variables

<table>
<tr><th>VARIABLE</th><th>DIMENSIONES</th><th>SUB-DIMENSIONES</th><th>INDICADORES</th><th>INSTRUMENTO</th></tr>
<tr><td rowspan="18">LA TRIGONOMETRÍA</td><td rowspan="18">TRIÁNGULOS</td><td rowspan="6">MATEMATIZA SITUACIONES</td><td>Clasifica los diferentes triángulos</td><td rowspan="18">prueba final o post test; lista de cotejo</td></tr>
<tr><td>Clasifica ángulos según su posición</td></tr>
<tr><td>Identifica los lados de un triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td>Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td>Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos</td></tr>
<tr><td>Describe los criterios de congruencia de triángulos</td></tr>
<tr><td rowspan="4">COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS MATEMÁTICAS</td><td>Representa gráficamente los elementos de un triángulo</td></tr>
<tr><td>Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes</td></tr>
<tr><td>Representa gráficamente los diferentes triángulos</td></tr>
<tr><td>Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ELABORA Y USA ESTRATEGIAS</td><td>Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos</td></tr>
<tr><td>Determina el complemento y suplemento de un ángulo</td></tr>
<tr><td rowspan="6">RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS MATEMÁTICAS</td><td>Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos</td></tr>
<tr><td>Interpreta del grafico mostrado las semejanzas entre los triángulos</td></tr>
<tr><td>Resuelve problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales</td></tr>
<tr><td>Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados</td></tr>
</table>

VARIABLE	DIMENSIONES	SUB-DIMENSIONES	INDICADORES	INSTRUMENTO
LA TRIGONOMETRÍA	ÁNGULOS	MATEMATIZA SITUACIONES	Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares.	prueba final o post test; lista de cotejo
		COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS MATEMÁTICAS	Representa medidas angulares en diferentes sistemas	
			Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares	
		ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	Efectúa conversiones de medidas angulares	
	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	MATEMATIZA SITUACIONES	Define una circunferencia trigonométrica	
			Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica.	
			Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo	
		ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal	
			Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas	
			Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno	
			Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente	
		RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS MATEMÁTICAS	Interpreta gráficamente las razones trigonométricas	
			Discrimina entre el concepto de seno y de coseno	
	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS GENÉRICOS	MATEMATIZA SITUACIONES	Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno	
			Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo	
		COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS	Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno	
			Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas	

		MATEMÁTICAS	Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas	
			Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica	
			Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas y ejercicios	

VARIABLE	DIMENSIONES	SUB-DIMENSIONES	INDICADORES	INSTRUMENTO
LA TRIGONOMETRÍA	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS GENÉRICOS	ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del coseno	prueba final o post test; lista de cotejo
			Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos	
			Calcula los lados y ángulos del triángulo oblicuángulo	
			Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos	
			Resuelve problemas de triángulos rectángulos	
		RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS MATEMÁTICAS	Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos	
			Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del seno.	
			Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo	
			Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley del seno	
			Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas	
			Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo	

4.3.2 Técnicas e instrumentos

La técnica de evaluación que se ha empleado en el presente trabajo es la de la observación, por medio de dos exámenes, una preprueba y una posprueba, aplicados en una única muestra, el grupo experimental, en dos momentos diferentes, al comenzar y al concluir la experimentación. Esta técnica se considera idónea para registrar los efectos de la aplicación de la propuesta didáctica "El aprendiz topógrafo" en el aprendizaje de los contenidos curriculares relacionados a la trigonometría porqué permite de contrastar los niveles de aprendizaje registrados antes y después del experimento y establecer si existe una significativa relación entre la variable dependiente y la independiente.

El instrumento utilizado ha sido una lista de cotejo, aplicada a las dos pruebas, organizada en base a 50 indicadores distribuidos en cada una de las dimensiones y sub-dimensiones a evaluar.

La aplicación de la lista de cotejo se justifica en la necesidad de reducir al mínimo la subjetividad de los datos recogidos y dar, de esta manera, una mayor confiabilidad a la investigación.

El examen aplicado en la preprueba y en la posprueba se conforma de dos ítems a través de los cuales se han explorado las capacidades matemáticas del estudiante en el matematizar situaciones asociadas a la trigonometría, en comunicar e interpretar informaciones trigonométricas, elaborar y utilizar estrategias para resolver problemas argumentando y justificando los procesos usados.

Las actividades propuestas en las prueba de pre y post test tuvieron como base dos bloques; el primer ítem, "*Exploramos nuestros saberes previos*", se relaciona con actividades sobre los triángulos y sobre los ángulos. Estas parten del análisis de una representación gráfica de distintos triángulos, relacionados entre ellos por diferentes propiedades que permiten su clasificación y descripción. Esta actividad pretende explorar la habilidad del estudiante reconocer, clasificar, describir y representar los diferentes triángulos, sus propiedades, compararlos según los criterios de congruencia y de semejanza. Aplicar las propiedades de los triángulos y elaborar estrategias para resolver problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras y los tres diferentes sistemas de medida angular.

El segundo ítem, "*Exploramos nuestros saberes trigonométricos*", se relaciona al bloque de actividades que tratan explorar los conocimientos de los estudiantes sobre las razones trigonométricas y la resolución de triángulos genéricos. Estas actividades, a través de un proceso que parte de la observación, pasando por la interpretación de los datos representados gráficamente propone la resolución de problemas que implican el uso de las razones trigonométricas y de las leyes del seno y coseno. Con este bloque de ejercicio se quiere evaluar el nivel de aprendizaje de los estudiantes y sus capacidades en reconocer y definir los conceptos de circunferencia trigonométrica, de seno, coseno y tangente, las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y las leyes del seno y del coseno. Proponiendo, en este ítem, la resolución de problemas se ha querido evaluar también la capacidad de interpretar gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos, elaborar estrategias aplicando las leyes trigonométricas y comprobar la validez de sus resultados en la resolución de problemas.

Por medio de este instrumento, y a partir de las evaluaciones aplicada en las dos pruebas, se ha podido verificar el real efecto del taller matemático "El Aprendiz topógrafo" y el consecuente aprendizaje significativo de las nociones trigonométricas.

TABLA15

Lista de cotejo

DIMENSIONES	ITEMS	INDICADORES	SI	NO
TRIÁNGULOS	Exploramos nuestros saberes previos	Clasifica los diferentes triángulos	1	0
		Clasifica ángulos según su posición	1	0
		Identifica los lados de un triángulo rectángulo	1	0
		Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo	1	0
		Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos	1	0
		Describe los criterios de congruencia de triángulos	1	0
		Representa gráficamente los elementos de un triángulo	1	0
		Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes	1	0
		Representa gráficamente los diferentes triángulos	1	0
		Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo	1	0
		Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos	1	0
		Determina el complemento y suplemento de un ángulo	1	0
		Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos	1	0
		Interpreta del grafico mostrado las semejanzas entre los triángulos	1	0
		Resuelve problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales	1	0
		Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras.	1	0
		Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras	1	0
		Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados	1	0
ÁNGULOS	Exploramos	Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares	1	0

	nuestros saberes previos	Representa medidas angulares en diferentes sistemas	1	0
		Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares	1	0
		Efectúa conversiones de medidas angulares	1	0
		Resuelve problemas utilizando los tres sistemas de medición angular	1	0

DIMENCIONES	ITEMS	INDICADORES	SI	NO
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	Exploramos nuestros saberes trigonométricos .	Define una circunferencia trigonométrica	1	0
		Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica	1	0
		Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo	1	0
		Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal	1	0
		Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas	1	0
		Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno	1	0
		Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente	1	0
		Interpreta gráficamente las razones trigonométricas	1	0
		Discrimina entre el concepto de seno y de coseno	1	0
RESOLUCIÓN DE RIÁNGULOS GENERICOS	Exploramos nuestros saberes trigonométricos .	Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno	1	0
		Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo	1	0
		Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno	1	0
		Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas	1	0
		Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas	1	0
		Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica	1	0
		Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas y ejercicios	1	0
		Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del coseno	1	0

		Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos	1	0
		Calcula los lados y ángulos de triángulo oblicuángulo	1	0
		Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos	1	0
		Resuelve problemas de triángulos rectángulos	1	0
		Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos	1	0
		Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del seno	1	0
		Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo	1	0
		Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley del seno	1	0
		Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas	1	0
		Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo	1	0

Para poder determinar el nivel de aprendizaje de los estudiantes a cada indicador se le ha asignado un mismo puntaje, un punto por acertar y cero puntos al no acertar. De esta manera las pruebas han sido evaluadas con una escala de puntuación que varía de 0 hasta 50 puntos. En base a esto se han individuado cuatro niveles de aprendizaje, los mismos que plantea el Ministerio de Educación en el Diseño Curricular Nacional; por cada nivel se asigna un rango de puntuación correspondiente.

TABLA 16

Escala de calificación de aprendizaje aplicada a la lista de cotejo

APRENDIZAJE	DEFINICIÓN DE APRENDIZAJE	RENDIMIENTO
0 – 26	EN INICIO	**0-10**
27 - 33	EN PROCESO	**11-13**
34 – 43	LOGRO PREVISTO	**14-17**
44 - 50	LOGRO DESTACADO	**18-20**

Esta escala numeral representa el juicio más honesto respecto al logro de aprendizaje del estudiante en cuanto al desarrollo de las nociones trigonométricas.

La siguiente tabla facilita una interpretación lógica y significativa de los puntajes registrados en las distintas pruebas, refiriéndose a los estándares planteados por los documentos curriculares.

TABLA 17

Escala de calificación de los aprendizajes en la Educación Básica Regular

APRENDIZAJE	RENDIMIENTO ACADÉMICO	DEFINICIÓN	DESCRIPCIÓN
44 – 50	20 -18	Logro destacado	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas
34 - 43	17 – 14	Logro previsto	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
27 – 33	13 – 11	En proceso	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
0 - 26	10 – 00	En inicio	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de estos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

Tab. 17: *Modificada de "**Diseño curricular Nacional de Educación Básica Regular**", Ministerio de Educación 2009*

Para dar rigor a los resultados de la presente investigación se ha aplicado a la lista de cotejo la prueba de confiabilidad Kuder Richardson 20.

TABLA 18

Prueba de confiabilidad

pre-test	Kr 20 = 0,22
post-test	Kr 20 = 0,88

La prueba de confiabilidad del instrumento demuestra los siguientes resultados al aplicar el Kr 20 a la prueba de pre-test se obtiene 0.22, que nos indica que tiene una confiabilidad baja; y al aplicar la misma prueba al post-test se obtiene un resultado de 0.88, que nos indica una confiabilidad muy alta. Entre estos dos resultados se observa una diferencia significativa la cual da validez al instrumento.

4.3.3 Plan de análisis

Para comprobar las hipótesis de la investigación se ha aplicado, a los dos conjuntos de datos, una prueba preliminar para verificar el supuesto de normalidad. Siendo la muestra constituida por un número de campiones inferior a 30, se ha utilizado la prueba de Shapiro-Wilk. Verificado que las dos muestras presentan una distribución normal, para contrastar las variables se ha empleado la prueba T de Student para muestras independientes, con un nivel de significancia del 5 % tal como se precisa en las investigaciones referidas a las ciencias sociales. El procesamiento y análisis de los datos se ha realizado con el programa estadístico SPSS (StaticProgram) versión 20.

V. RESULTADOS

5.1 Resultados

Esta investigación ha tenido como objetivo general determinar la influencia de la aplicación de la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", basada en el enfoque del aprendizaje significativo, para la enseñanza de los contenidos curriculares de trigonometría en los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Pública "Santa Rosa" de Uchusquillo.

Los resultados de la experimentación se han analizado considerando los objetivos específicos planteados en el presente trabajo de investigación:

- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y especificadamente los contenidos curriculares de trigonometría de los alumnos del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo a través de un pre-test.
- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y especificadamente los contenidos curriculares de trigonometría de los alumnos del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa "Santa Rosa" de Uchusquillo a través de un post-test.
- Contrastar los resultados obtenidos del grupo experimental, para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica "El aprendiz topógrafo", basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los

contenidos curriculares de trigonometría a los alumnos del quinto grado de educación secundaria.

5.1.1 Nivel real de aprendizajes de los integrantes del grupo experimental observado a través del pre-test

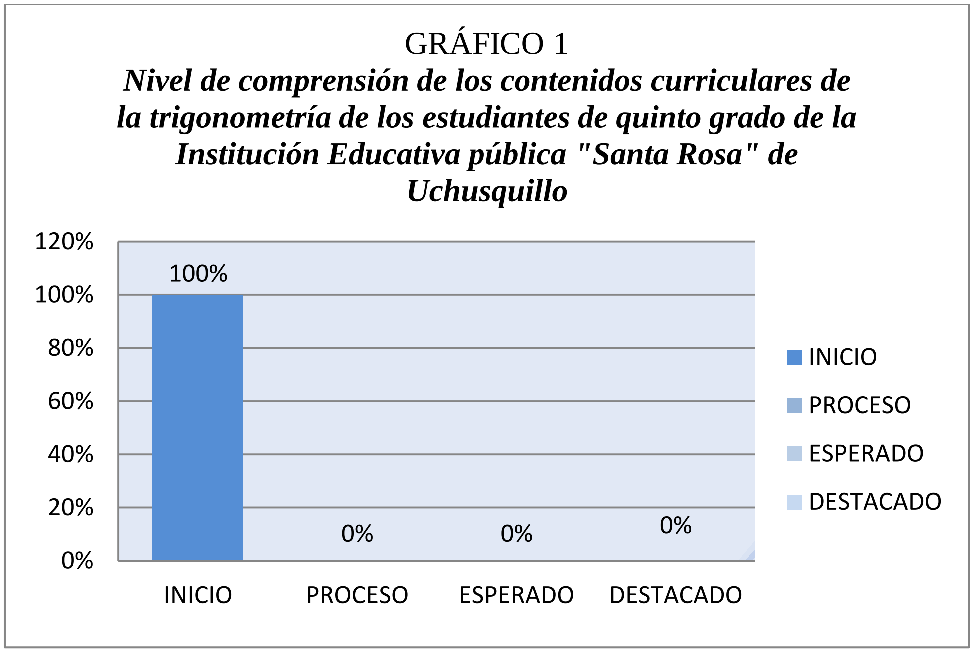
Los resultados de la medición del pre-test, realizada el 15 de julio del año 2016 al grupo experimental, se presentan a continuación con el auxilio de una tabla de frecuencia y de un histograma.

TABLA19

Nivel de comprensión de los contenidos curriculares de la trigonometría de los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa pública "Santa Rosa" de Uchusquillo

Definición de aprendizaje			f_i	$h_{i\%}$
NOTA	PUNTAJE	DEFINICIÓN DE APRENDIZAJE		
INICIO	De 0 a 26	APRENDIZAJE EN INICIO	15	100%
PROCESO	De 27 a 33	APRENDIZAJE EN PROCESO	0	0%
ESPERADO	De 34 a 43	APRENDIZAJE ESPERADO	0	0%
DESTACADO	De 44 a 50	APRENDIZAJE DESTACADO	0	0%
TOTAL			15	100%

Tab. 19: *Resumen de los resultados obtenidos con la lista de cotejo aplicada a la prueba de pre-test el 15 de julio del 2016*



Graf. 1:*Representación gráfica de frecuencias relativas de los niveles de aprendizaje obtenidos con la lista de cotejo aplicada a la prueba de pre-test.*

En la tabla 19 y en el gráfico 1 se observa que el 100% de los estudiantes no ha alcanzado los objetivos propuestos en este estudio.

En la prueba del pre-test los estudiantes alcanzaron una puntuación que varía de un mínimo de 1 punto a un máximo de 7 puntos, con una media de 3.8. La observación de los resultados presentados evidencia de una deficiencia en la capacidad de desarrollar los contenidos curriculares de la trigonometría en la totalidad de los estudiantes.

5.1.2 Nivel real de aprendizajes de los integrantes del grupo experimental observadoa través del post-test.

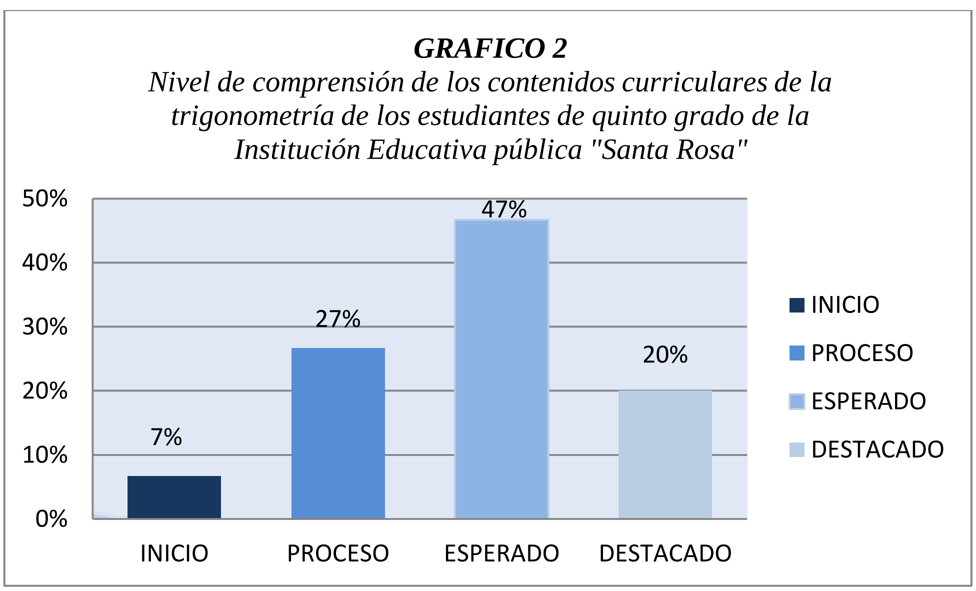
Los resultados de la medición realizada por medio del post-test en el grupo experimental se presentan a continuación con el auxilio de una tabla de frecuencia y de un histograma.

TABLA 20

Nivel de comprensión delos contenidos curriculares de la trigonometría de los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa pública "Santa Rosa" de Uchusquillo

Definición de aprendizaje			f_i	$h_{i\%}$
NOTA	PUNTAJE	DEFINICIÓN DE APRENDIZAJE		
0 - 10	De 0 a 26	APRENDIZAJE EN INICIO	1	7%
11 -13	De 27 a 33	APRENDIZAJE EN PROCESO	4	27%
14 - 17	De 34 a 43	APRENDIZAJE ESPERADO	7	47%
18 - 20	De 44 a 50	APRENDIZAJE DESTACADO	3	20%
TOTAL			15	100%

Tab. 20:*Resumen de los resultados obtenidos con la lista de cotejo aplicada a la prueba de post-test del 20 de septiembre de 2016.*



Graf. 2: *Representación gráfica de frecuencias relativas de los niveles de aprendizaje obtenidos con la lista de cotejo aplicada a la prueba de post-test.*

En la tabla 20 y en el gráfico 2 se observa que el 67% de los estudiantes ha alcanzado los objetivos propuestos en este estudio y que 3 estudiantes, que representan el 20% del total, superó el logro previsto obteniendo niveles de aprendizaje que varían entre 44-50, demostrando así un nivel de aprendizaje destacado. Otra información que resalta de la observación de estos datos estadísticos es que 7 estudiantes de 15, es decir el 47%, han logrado los objetivos previstos, alcanzando una calificación en el intervalo de aprendizaje entre 34-43. El 27% de los estudiantes alcanzó un nivel de aprendizaje en proceso, calificándose en el intervalo de 27-33. El 7% de los estudiantes no superó los objetivos previstos, alcanzando una calificación en el intervalo de 0 - 10.

En la prueba del post-test los estudiantes alcanzaron una puntuación que varía de un mínimo de 22 puntos a un máximo de 48 puntos, con una media de 37,13. La observación de los resultados presentados evidencia una marcada emejora en la capacidad de desarrollar los contenidos curriculares de la trigonometría en la totalidad de los estudiantes. De tal forma también, demuestra la validez de la propuesta aplicada; puesto que el 67% de los estudiantes han superado a los intervalos de en “inicio” y en “proceso”.

5.1.3 Contraste de los resultados obtenidos en el grupo experimental en las dos observaciones del pre-tes y post-test

Para contrastar los resultados obtenidos en el grupo experimental en la preprueba y en la posprueba, al fin de verificar las hipótesis de la investigación, se ha aplicado, a las dos muestras de datos, una prueba preliminar para verificar el supuesto de normalidad. Esto se considera un requisito fundamental para determinal la prueba estadistica adecuada al fin de poder realizar una inferencia estadistica de la muestra a la población.

Siendo el grupo experimental constituido por menos de 30 alumnos, se ha utilizado la prueba de Shapiro-Wilk.

TABLA 21

Prueba de Shapiro-Wilk para la normalidad

		Estadístico	gl	Sig.
***H_1**: las muestras presentan una distribución NO normal*	pre-test	,931	15	,278
***H_0**: las muestras presentan una distribución normal*	post-test	,973	15	,895

La significancia del pre-test 0,278 y la del post-test 0,895, entrambas mayores del valor fijado al 5% , verifican la hipótesis nula de la normalidad, es decir ambas muestras tienen una distribución normal.

Para establecer la relación que existe entre la variable independiente, aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo”, y la variable dependiente, aprendizaje significativo de las nociones trigonométricas, y poder comprobar la influencia de la propuesta pedagógica sobre el aprendizaje se ha empleado la prueba T de Student para muestras relacionadas, con un nivel de significancia del 5%.

Esta prueba se ha elegido considerando el tipo de trabajo, longitudinal con dos medidas, y el tipo de variable dependiente, numérica.

TABLA22

Matriz de pruebas estadísticas

	Variable dependiente	
	Pruebas no paramétricas	Pruebas

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td><td>paramétricas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Variable independiente</td><td>Nominal Dicotómica</td><td>Nominal Politómica</td><td>Ordinal</td><td>Numérica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Estudio transversal Muestras independientes</td><td>Un Grupo</td><td>X^2 Bondad de ajuste Binomial</td><td>X^2 Bondad de ajuste</td><td>X^2 Bondad de ajuste</td><td>T de Student una muestra</td></tr>
<tr><td>Dos grupos</td><td>X^2 Bondad de ajuste Corrección de Yates Test exacto de Fisher</td><td>X^2 de Homogeneidad</td><td>U Mann-Withney</td><td>T de Student muestras independientes</td></tr>
<tr><td>Más de dos grupos</td><td>X^2 Bondad de ajuste</td><td>X^2 Bondad de ajuste</td><td>H Kruskal-Wallis</td><td>ANOVA con un factor INTERSUJETOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estudio longitudinal Muestras relacionadas</td><td>Dos medidas</td><td>Mac Nemar</td><td>Q de Cochran</td><td>Wilcoxson</td><td>T de Student muestras relacionadas</td></tr>
<tr><td>Más de dos medidas</td><td>Q de Cochran</td><td>Q de Cochran</td><td>Friedman</td><td>ANOVA para medidas repetidas INTRASUJETOS</td></tr>
</table>

Tab. 22: *Matriz de pruebas estadísticas para la contrastación de hipótesis, modificada de Varela López, 2016*.

La matrriz de pruebas estadísticas muestra que la T de Student para muestras relacionadas es la que más se ajusta al presente estudio.

TABLA 23

Prueba T para muestras relacionadas

	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia 95%	
						Inferior	Superior
Resultados del pre-test y del post-test en el grupo experimental	16,977	14	,000	33,33	1,963	29,544	37,544

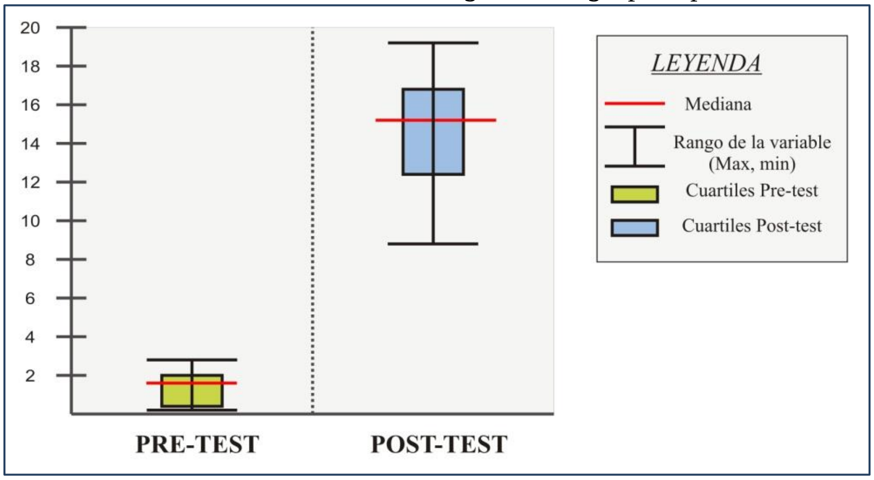
Los resultados mostrados por esta prueba demuestran que realmente existe una relación entre las variables, es decir que hay una diferencia significativa entre el aprendizaje observado en el pre-test y lo observado en el post-test, entre los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la I.E. “Santa Rosa” integrantes del grupo experimental. De esta manera, observando el valor de la significancia sig. 0,000 < 0,05, podemos afirmar que se rechaza la hipótesis nula y se considera verificada la hipótesis alterna, es decir que la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece significativamente el aprendizaje de los contenidos curriculares de trigonometría en los alumnos del quinto grado de educación secundaria.

5.1.4 Comparación del rendimiento académico observado en las pruebas de pre-test y post-test

Para reforzar la validez de los resultados obtenidos en la presente investigación se ha comparado también el rendimiento académico de los alumnos integrantes el grupo experimental observado en la preprueba y en la posprueba. Estos datos se presentan en el siguiente gráfico de cajas.

GRÁFICO 3

Rendimiento académico de los integrantes el grupo experimental



En el grafico 3 se observa una diferencia significativa entre los resultados del pre-test y los del pos-test, diferencia que refuerza la validez de la hipótesis de investigación sobre la influencia positiva de la aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo” en el aprendizaje de la trigonometría.

En el pre-test, los estudiantes presentan un rendimiento académico deficiente, obteniendo notas que varían en un rango de valores desde 0,4 veintésimohasta 2,8 veintésimos; el valor de la media registrada en este examen es de 1.5 veintésimos y el de la mediana equivale a 1,6 veintésimo.

Luego de la aplicación del taller matemático los resultados obtenidos en el post-test, son significativamente mejores, ya que el rango de las notas va desde 8.8 veintésimos hasta 19.2 ventesimos; el valor de la media alcanza un valor de 14.9, y el valor de la mediana corresponde a 15,2 veintésimos.

Al contrastar los rangos, las medias aritméticas y las medianas obtenidos en la evaluación del pre-test y pos-test afirmamos una mejora significativa en el rendimiento académico lo cual corrobora la validez de la herramienta pedagógica, el taller matemático “El aprendiz topógrafo”, como instrumento para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos curriculares de la trigonometría.

5.2 Análisis de los resultados.

En este apartado se expone una interpretación de los resultados basada en los objetivos específicos y en la hipótesis de la investigación.

5.2.1 Interpretación de los resultados observados en el pre-test

Analizando los resultados observados en el grupo experimental antes de la aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo”, resaltan algunas informaciones importantes.

El primer dato que resalta, es que el 100% de los estudiantes no han alcanzado los estándares propuestos en el examen de pre-test; esto señala que el nivel de aprendizaje se encuentra muy por debajo de los objetivos esperados, ya se muestra una deficiencia en el nivel de compresión y resolución de problemas de los contenidos curriculares de la trigonometría.

Evidentemente este gran porcentaje de los estudiantes ha mostrado dificultad en no resolver los problemas, que se consideran parte de los saberes previos que el alumno debe tener formalizados, al concluir el cuarto grado de educación secundaria.

Por otra parte, los resultados muestran que 4 estudiantes han logrado obtener un resultado favorable en algunos de los indicadores, como en : definir la circunferencia trigonométrica, identificar los elementos de la circunferencia trigonométrica, interpretar gráficamente las razones trigonométricas y discriminar entre el concepto de seno y de coseno.

5.2.2 Interpretación de los resultados observados en el post-test

De un análisis más profundizado de los resultados observados en el grupo experimental al finalizar la aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo”, se pueden resaltar algunos datos interesantes.

El primer dato que destaca es que un 67% de los estudiantes ha logrado, en el tiempo establecido alcanzar los objetivos propuestos, logrando el nivel de aprendizaje esperado. Esto señala que la aplicación de la propuesta pedagógica “El Aprendiz Topógrafo” favorece el aprendizaje significativo de los contenidos curriculares de la trigonometría. Pero de todos modos los resultados muestran la persistencia de algunas dificultades evidenciadas por la presencia de 5 estudiantes que no han alcanzado los niveles esperados.

Otra información que se puede rescatar del análisis de la lista de cotejo, es una dificultad común entre los alumnos, puesto que no han logrado organizar y elevar a un nivel significativo el aprendizaje de conceptos propedéuticos a la trigonometría.

Evidentemente en un porcentaje mínimo de los estudiantes se ha manifestado la dificultad de aplicar la semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes, y resolver problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales; otros alumnos muestran dificultades en elaborar estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras. Estos son contenidos que se consideran parte de los saberes previos que un alumno debe tener establecidos al concluir el cuarto grado.

Otro porcentaje de estudiantes, ha manifestado la dificultad de representar un ángulo en los diferentes sistemas y sobre todo en aplicar las fórmulas de conversión para el cálculo de las medidas angulares en los tres sistemas de medición.

Por otro lado, analizando los contenidos curriculares de la trigonometría a partir de la lista de cotejo, se observa una dificultad en los estudiantes, de no captar, entender y utilizar los conceptos trigonométricos, además los estudiantes presentan la dificultad en aplicar oportunamente los conceptos del seno, coseno, tangente y cotangente en la resolución de problemas.

En cuanto a los resultados favorables, luego de la aplicación del taller matemático "El aprendiz topógrafo", se observa que los estudiantes han alcanzado la capacidad de describir los criterios de congruencia de triángulos, interpretar gráficos mostrados de la semejanza entre los triángulos, diferenciar un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así mismo un ángulo positivo de uno negativo, como también han logrado discriminar entre el concepto de seno y de coseno, analizar y resolver representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno, por consiguiente logran plantear y resolver problemas aplicando la ley del coseno.

Otro resultado óptimo que presentan los estudiantes, es que logran aplicar las propiedades de los triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos en la resolución de problemas y ejercicios, además logran relacionar los elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas.

Luego del análisis realizado que se muestra en la lista de cotejo, se observa que la totalidad de los estudiantes han logrado alcanzar la mayoría de los indicadores, logrando de esta manera un aprendizaje significativo de los contenidos curriculares de la trigonometría.

5.2.3 Análisis de comparación

Al realizar el análisis de los resultados obtenidos del pre-test y del post-test del grupo experimental evidenciamos una diferencia muy significativa, luego de aplicar la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”.

A través de la prueba T se ha observado una significativa influencia de la variable independiente:realización del taller matemático “El Aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque significativo, con actividades concretas, “sobre la variable dependiente: Aprendizaje significativo de las nociones trigonométricas”. Esta ha sido detallada en la tabla estadística número 23, la cual muestra que existe una diferencia sustancial entre el pre-test y el post-test aplicado al grupo experimental.

Los logros en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos curriculares de la trigonometría en el grupo experimental se alcanzan gracias al apoyo del taller matemático que está diseñado con actividades concretas y contextualizadas a la vida cotidiana de los estudiantes. Esta forma de trabajo fortalece y desarrolla las capacidades cognitivas y creativas, que son necesarias para el aprendizaje significativo del estudiante. Además, los talleres matemáticos fomentan una buena aplicación y participación en los estudiantes para la comprensión eficiente de los contenidos curriculares de la trigonometría.

Por otra parte los materiales y recursos que se emplean en cada situación específica del proceso de la enseñanza-aprendizaje son de carácter manipulativo, así cada material se convierte en un instrumento didáctico y comunicativo, en el desarrollo habitual de la clase.

VI. CONCLUSIÓNES

6.1 Conclusiones

Al concluir la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, para la enseñanza de los contenidos curriculares de la trigonometría en los estudiantes del quinto grado de educación secundaria, llevando a cabo discusión de los resultados, se llegó a las siguientes conclusiones.

- el nivel de comprensión de las nociones trigonométricas, que presentaron los estudiantes del quinto grado, antes de la aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo”, fue deficiente. Tenían pocas habilidades para resolver problemas e interpretar gráficos y aplicar las razones trigonométricas para la resolución de triángulos genéricos.
- la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, fue eficiente debido a que aumentaron los resultados referidos al nivel de logro. Esto se verifica con la ayuda de la escala de logros de aprendizaje, aplicando el post-test ya que luego de la aplicación del taller matemático “El aprendiz topógrafo”, 67% de los estudiantes han alcanzado los objetivos propuestos.
- se verificó la hipótesis planteada que: la aplicación de la propuesta pedagógica “El aprendiz topógrafo”, basada en el enfoque del aprendizaje

significativo, favorece la enseñanza de los contenidos curriculares de la trigonometría en los estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la I.E. “Santa rosa” de Uchusquillo.

6.2 Recomendaciones

- es fundamental utilizar el taller matemático “El aprendiz topógrafo” para que el estudiante del quinto grado pueda matematizar, comunicar, elaborar, razonar de manera espontánea y fluida, sus capacidades, habilidades y técnicas, al resolver ejercicios y problemas trigonométricos, para luego llegar a resolver problemas reales que se presentan en las actividades diarias.
- es esencial fomentar la enseñanza de la trigonometría ligadas al entorno vivencial y cultural de los estudiantes, enfatizando así el valor sustancial del aprendizaje significativo.
- es imprescindible fomentar dentro del salón un ambiente de constante comunicación entre los estudiantes y el docente, ya que esto permite al estudiante expresarse de manera libre y espontánea.
- es importante que los estudiantes empiecen su aprendizaje a partir de situaciones problemáticas, que requieran los cálculos relacionados a los contenidos trigonométricos.
- es fundamental desarrollar sesiones de aprendizaje establecidas en actividades topográficas dentro de entornos naturales como el campo, la plaza, la escuela, etc. esto permite al educando motivar y desarrollar sus capacidades y habilidades para resolver los datos obtenidos sobre lugares determinados.

- es importante realizar actividades grupales, porque ayuda a los estudiantes a intercambiar conocimientos, destrezas y habilidades.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso Borrego, J. L., Cabezón Ochoa, M. Á., & al., e. (2008). TRIGONOMETRÍA B. En M. Á. José Luís Alonso Borrego, *MATEMÁTICAS* (pág. 115). Madrid: Descartes.

Álvarez Parra, F. (2012). *DIFERENCIA ENLA CALIDADDE LA EDUCACIÓN E INEFICIENCIA.* CAF.

Antonio Gonzales, Beatriz Moreno, Pablo, Nuñes de la Torre. (2009). APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LOS MATERIALES DE MATEMÁTICAS. *La Kodorniz*, 6.

Ausubel, D. (1976). *PSICOLOGIA EDUCATIVA: UN PUNTO DE VISTA COGNOSCITIVO.* Mexico.

Batanero, C., & Diaz, C. (2011). *ESTADÍSTICA CON PROYECTOS.* Granada: Departamento de didáctica de la matemática - Universidad de Granada.

Cabellos, A. M., & Montoro, E. C. (2001). ACTIVIDADES MATEMÁTICAS FUERA DEL AULA: CUADERNO DE CAMPO. En A. M. Cabellos, *Trigonometria y la realidad* (pág. 74). Madrid: Suma.

Ferradas Arrieta, J. L. (2013). *PERFIL PROFECIONAL Y PERFIL DIDÁCTICO DEL DOCENTE DE AULA, DEL NIVEL SECUNDARIO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS COMPRENDIDAS EN EL ÁMBITO DEL DISTRITO DE SANTIAGO DE SURCO.* Lima - Perú: ULADECH.

Flores Gil, F. L. (2008). *HISTORIA Y DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA.* Jaen - España: ITTAKUS.

Ganimian, A. J. (2015). *BAJOS RESULTADOS, ALTAS MEJORAS.* Lima: UMC-MINEDU.

García Ruiz, W. M. (2012). *NATURALEZA DE LA ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS UTILIZADAS POR EL DOCENTE Y EL LOGRO DE APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES DEL ÁREA DE MATEMÁTICA DEL VI Y VII CICLO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS DEL DISTRITO DE HUARMEY.* Huarmey: ULADECH.

Guadalupe Mendizábal, C. (2013). *PISA 2012: PRIMEROS RESULTADOS.* Lima: MINEDU.

Guerrero Ortiz, L. A. (2013). *RUTAS DEL APRENDIZAJE.*LIMA: MINEDU.

Mary P. Dolciani, Simon L. Berman, William Wooton. (1976). *ÁLGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRÍA.* Mexico: Publicación Cultural S.A.

Medina, J. F. (2010). *UUNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA.* Granada: Uivercidad de Granada.

Ministerio de Educación. (2009). *DICEÑO CURRICULAR NACIONAL.* Lima: MINEDU.

Ministerio de Educación. (2014). *MARCO CURRICULAR NACIONAL.* Lima: MINEDU.

Ministerio de Educación. (2015). *RUTAS DEL APRENDIZAJE.* Lima: MINEDU.

Navarro Hudiel, S. J. (2008). *MANUAL DE TOPOGRAFÍA- PLANIMETRÍA.*

Nevot. (2001). *ANAÁLICIS CRÍTICODE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA Y PROPUESTA PEDAGÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.* España: Uned.

Ortiz Luis Alfredo Guerrero. (2013). *RUTAS DEL APRENDIZAJE.* Lima - Perú: MINEDU.

Reyes Hernandez, A. (1999). *JUEGOS DIDÁCTICOS EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR.* San Nicolas de los Garza N.T.: Univercidad de Nueva León.

San Martín Sicre, O. J. (2003). *APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS DEFINICONES DE SENO, COSENO Y TANGENTE DE ÁNGULOS AGUDOS* . Sonora: Univercidad Pedagógica Nacional.

ANEXOS

EL APRENDIZ TOPÓGRAFO

Cuaderno de trabajo

Teoría y práctica

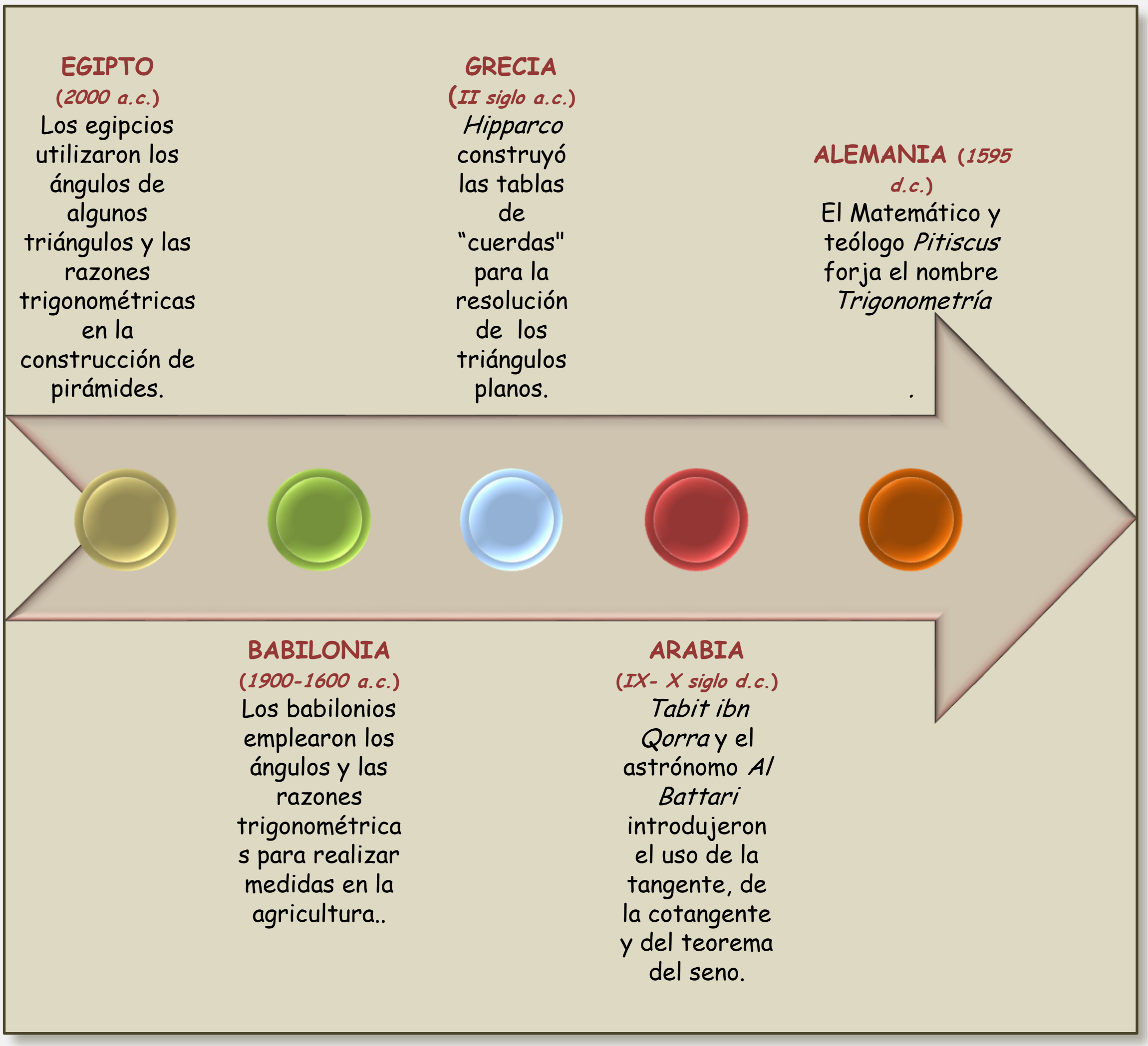
Unidad didáctica para aprender los conceptos básicos de la trigonometría explorando la profesión del topógrafo.

Vº grado I.E 86378
"Santa Rosa" de Uchusquillo

“HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA”

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. El término trigonometría deriva del griego *Τρίγωνομετρία* y su significado etimológico es propiamente “medida de triángulos”.

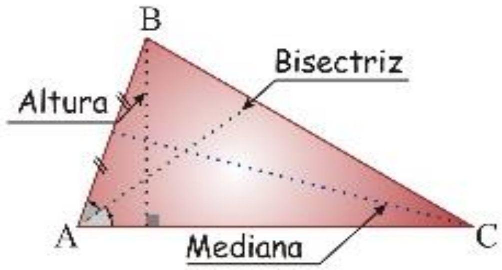
Ésta rama de la matemática surgió por la necesidad de resolver problemas relacionados con los elementos de un triángulo (lados y ángulos) tanto planos como esféricos y de la observación de los fenómenos astronómicos.



La trigonometría tanto plana como esférica tiene una gran importancia por su implicancia en numerosas situaciones de la vida real, siendo el conjunto de conocimientos que facilita la medición de los entornos próximos (topografía) como el de los entornos lejanos (astronomía) mediante métodos precisos y eficaces. Además la aplicación de los conceptos trigonométricos ha permitido al hombre perfeccionar las técnicas de navegación, la elaboración de mapas geográficos y la construcción de obras arquitectónicas e ingenierísticas relevantes

REPASAMOS LO QUE SABEMOS: LOS TRIÁNGULOS

El triángulo es un polígono de tres lados. Se define como el polígono mínimo, es decir que el número mínimo de lados para poder formar un polígono es tres. Todos los demás polígonos pueden ser descompuestos en diferentes combinaciones de triángulos. Es una figura plana rígida, e indeformable, es decir que dados tres segmentos se pueden formar solo triángulos congruentes entre ellos. Cuidado pero, datos tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo. Para hacer esto, la medida de uno de sus lados debe ser menor que la suma de los otros dos lados y al mismo tiempo mayor que su diferencia.



Altura: es el segmento trazado de un vértice del triángulo hacia el lado opuesto o de su prolongación perpendicular a estos últimos. El punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo se denomina *ortocentro (O)*.

Bisectriz: es la linea que divide al ángulo en dos partes de igual medida. El punto de intersección de las tres bisectrices se llama *incentro (I)*.

Mediana: es el segmento que une el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto. El punto de intersección de las tres medianas se llama *baricentro (G)*.

Mediatriz: es la recta que pasa por el punto medio de cada lado de un triángulo perpendicularmente al lado mismo. El punto de intersección de las tres mediatrices se llama *circuncentro (C)*.

PROPIEDADES

Suma de ángulos internos: la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180º.

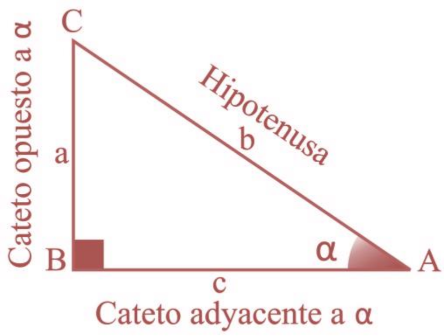
Ángulos externos: la medida de un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.

Suma de ángulos externos: la suma de los ángulos externos de todo triángulo es 360º.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Entre los lados de un triángulo rectángulo existe una relación que se refiere a las áreas de los cuadrados construidos sobre dichos lados. Esta relación se conoce como teorema de Pitágoras.

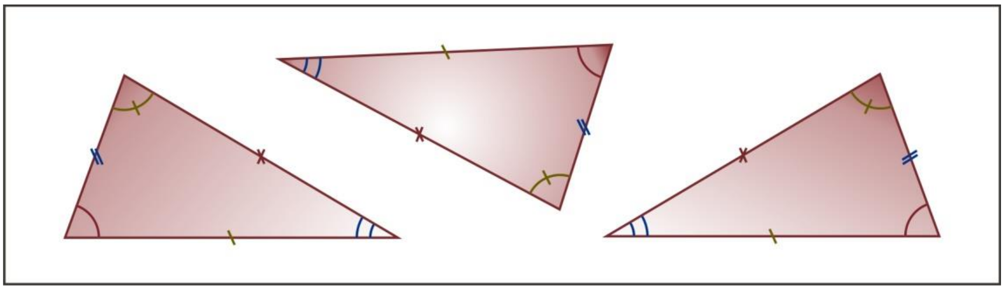
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



$b^2 = a^2 + c^2$

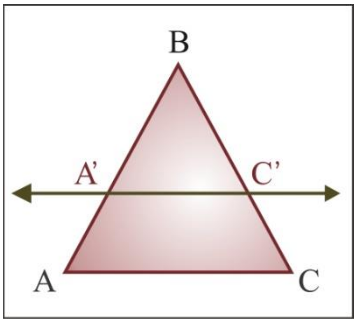
TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes cuando sus ternas angulares son iguales. Entre los lados homólogos de triángulos semejantes se mantiene una determinada proporcionalidad o razón.



Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes, siendo que en cualquier triángulo equilátero todos sus ángulos miden 60^0 y sus lados son proporcionales.

TEOREMA DE TALES EN UN TRIÁNGULO



Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados en partes proporcionales.

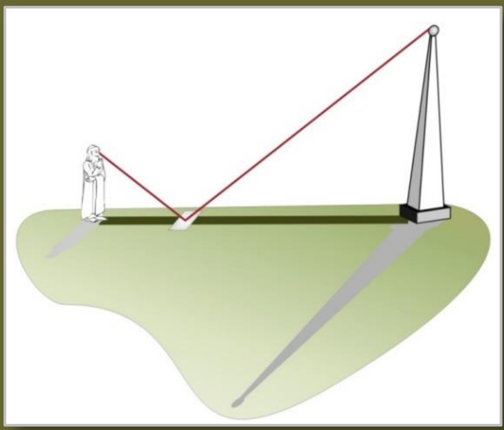
$$\frac{BA'}{BA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$$

El teorema de TALES se puede aplicar a cualquier triángulo. Así, si en el triángulo ABC se traza una recta(A'C') paralela al lado AC , se obtiene otro triángulo A’BC’, semejante al triángulo ABC.

El aprendiz topógrafo

Vamos a aprender un método para medir la altura de algún elemento no accesible a la medición directa, como un edificio, una estatua, solamente con el auxilio de un simple espejo. Este método fue ideado por Euclides de Alejandría en el siglo III a.C.

"La medición de alturas con el espejo".



Se cuenta que, para poder medir la altura de un obelisco, Euclides pensó aplicar las propiedades de los triángulos semejantes.

En un espejo plano realizó una pequeña marca y puso el espejo en el piso a una determinada distancia de la base del obelisco; luego se alejó de él, desplazándose sobre una recta pasante por el espejo y la base del obelisco, hasta que la punta de este, quede reflejada en el espejo, no coincidió con la marca que hizo anteriormente. Ahora la punta del obelisco, su base u la marca en el espejo formaban un triángulo semejante a lo formado por sus ojos, sus pies y la pequeña marca en el espejo.

De allí aplicando la semejanza de los triángulos:

$$Altura\ del\ obelisco = \frac{Altura\ de\ los\ ojos}{\begin{matrix}Distancia\ entre\ el\\ observador\ y\ el\ espejo\end{matrix}} \times Distancia\ entre\ el\ espejo\ y\ la\ base\ del\ obelisco$$

Así Euclides pudo medir la altura del obelisco sin la necesidad de subir hasta su punta.

¡Ahora prueba tú!

Forma con tus compañeros tu equipo de topógrafos (tres o cuatro integrantes), procúrate un espejo, una huincha métrica y el cuaderno de campaña para tus apuntes. Puedes medir la altura del asta para el izamiento de la bandera en tu colegio, la altura del aro de baloncesto. ¿Listos?

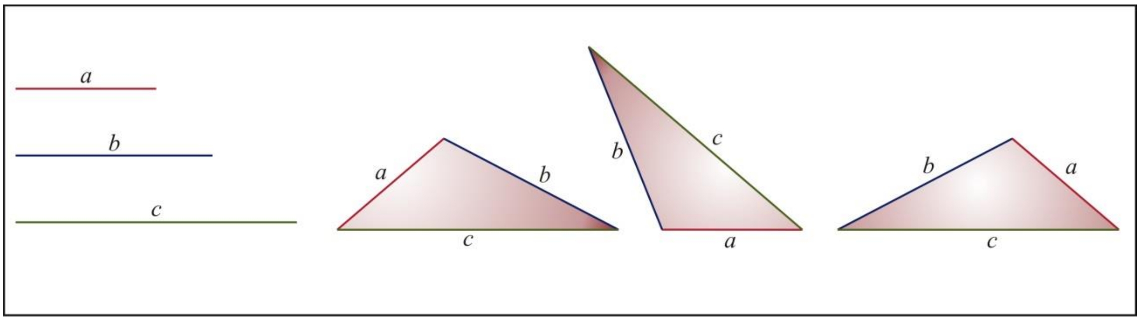
A medir!!!!!

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Dos triángulos son congruentes (≅) cuando los dos tienen la misma terna angular y los lados homólogos son iguales. Un triángulo es congruente a otro si a través de una rotación y de una traslación en el plano es posible sobreponerlo al primero. Es decir, que dos triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño aun cuando su orientación es diferente.

Para establecer la congruencia entre triángulos existen tres reglas llamadas criterios de congruencia:

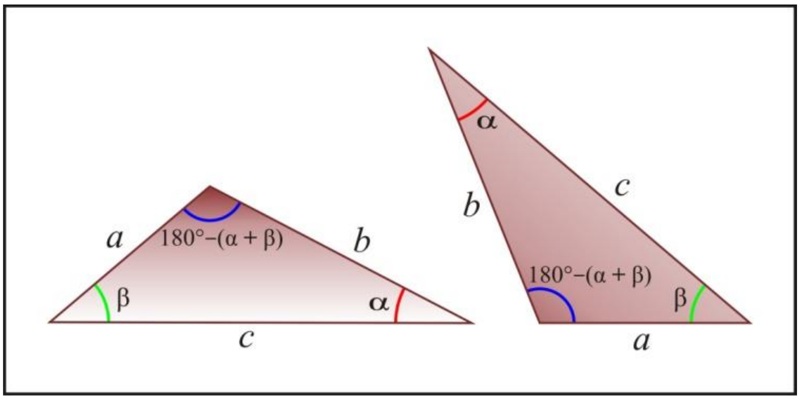
Criterio LLL: Si sus tres lados son respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



Por construcción del triángulo, dados tres segmentos, de los cuales el mayor es el más pequeño de la suma de los otros dos, se pueden formar infinitos triángulos, todos congruentes.

Criterio ALA: *Si tienen un lado y los dos ángulos adyacentes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.*

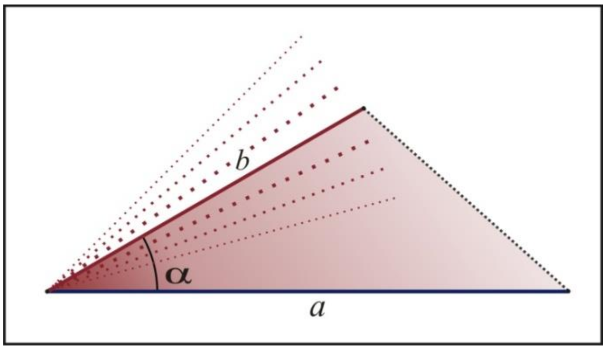
Se sabe que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo mide 180°.Si en los dos triángulos ABC y DEF dos parejas de ángulos son iguales, BAC = DFE y ACB=EDF, entonces también la tercera pareja de ángulos serán iguales; ABC=DEF. Esto comporta que los dos triángulos por definición son semejantes.



Se sabe también que en dos triángulos semejantes la proporción entre sus lados homólogos se mantiene constante; Así si los lados AC y DF son iguales también las otras dos parejas lo serán AB=FE, BC=DE. Entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio LLA: Si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Criterio LAL: si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



Por la construcción de triángulos, dados dos lados, la longitud del tercero depende de la amplitud del ángulo comprendido entre ellos. Así que dados dos lados y el ángulo que estos forman se pueden construir infinitos triángulos, uniendo los dos vértices libres, y todos son congruentes entre ellos.

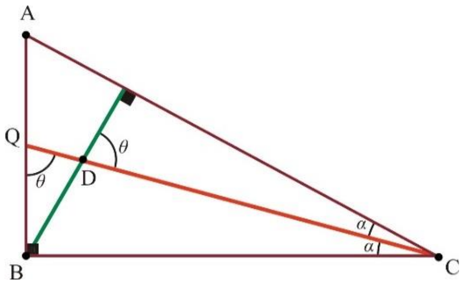
EJERCICIOS

1. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos están en razón de 5 a 4. ¿Cuánto miden estos ángulos?

2. Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 30 cm y 40cm.

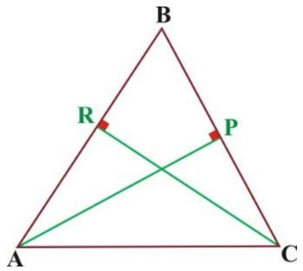
3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $6\sqrt{2}$ m calcula su área.

4. En un triángulo rectángulo ABC, la bisectriz interior CQ corta a la altura BH en D. calcula BD si AB = 5 m y AQ = 3 m.



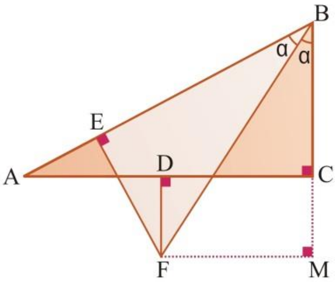
5. Si la diagonal de un cuadrado mide $4\sqrt{6}$ cm, ¿cuál es perímetro del cuadrado?

6. En un triángulo ABC, AC = 20 cm. Se trazan las alturas AP y CR calcula BP si BR = 15 cm y BC = 24 cm.

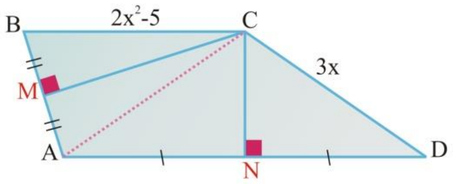


7. Calcula la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 15 m de alto cuando el sol se encuentra a 30° por encima del horizonte

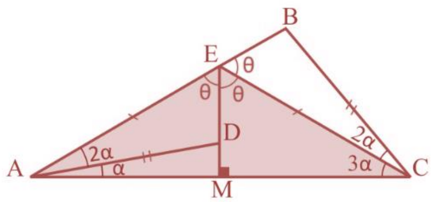
8. Calcula BC. Si DF = 2,7 m; BE = 7,2 m



9. Calcular el valor de "*x*"

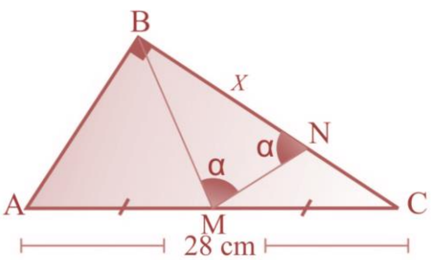


10. Calcular el valor de 4α si AM = MC

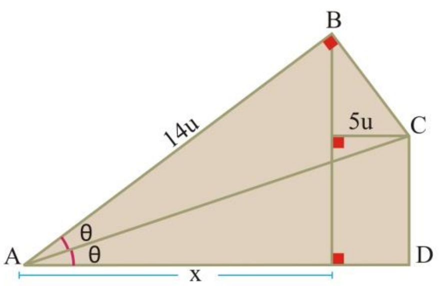


11. Calcular el valor de *x* utilizando los criterios de congruencia

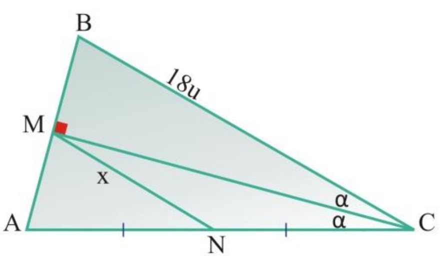
a)



b)



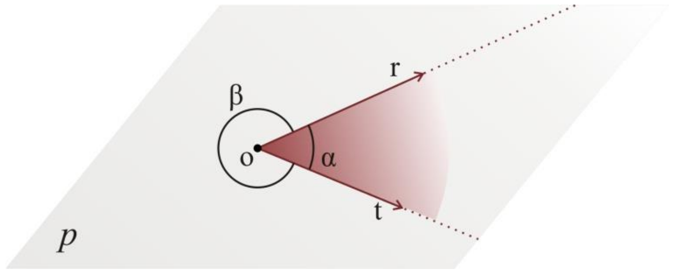
c)



EL ÁNGULO

Dos semirrectas complanares que tengan el origen en común dividen el plano en dos regiones. Cada una de ellas corresponde a un ángulo.

El ángulo es la porción del plano delimitada por dos semirrectas que tienen el origen en común. A las dos semirrectas se les llama lados del ángulo y al punto de origen, vértice.



P: plano

$\overrightarrow{Or}$ y $\overrightarrow{Ot}$: rayos

α y β: ángulos

O: origen

Los ángulos, generalmente, se representan a través de las letras minúsculas del alfabeto griego (α, β, γ, δ).

Por la misma definición de ángulo (región del plano delimitada por dos semirrectas complanares que tienen el origen en común) esta es una región infinita, así la medida de un ángulo llamada amplitud, indica que parte del plano corresponde al ángulo.

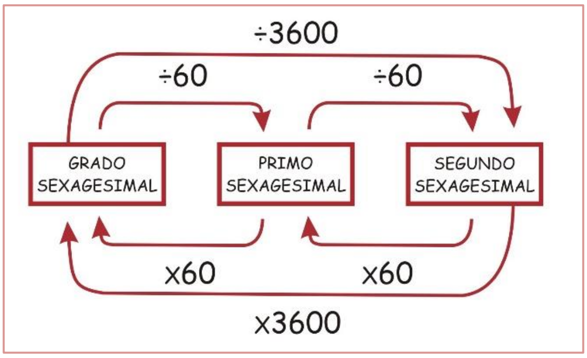
SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Existen diferentes sistemas de medición de los ángulos, pero todos expresan, a través de diferentes unidades de medida, la amplitud como parte de un ángulo de referencia.

Entre los sistemas de medida de los ángulos, los más utilizados a nivel internacional son el sistema *sexagesimal*, el sistema *centesimal* y el sistema *radial*.

SEXAGESIMAL

El sistema sexagesimal divide el ángulo completo en 360 partes iguales, llamados *grados sexagesimales (°)*. Este sistema tiene como principal característica la de dividir sus unidades en sesenta sub-unidades, unidades de nivel inferior; así el grado sexagesimal, que es la unidad principal de este sistema, se divide en 60 primos ('), unidad secundaria. Los primos a la vez se dividen en 60 segundos ('') que son las unidades más pequeñas.



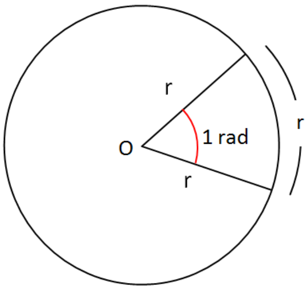
Entre todos los sistemas de medición de los ángulos, el sexagesimal es seguramente el más conocido.

CENTESIMAL

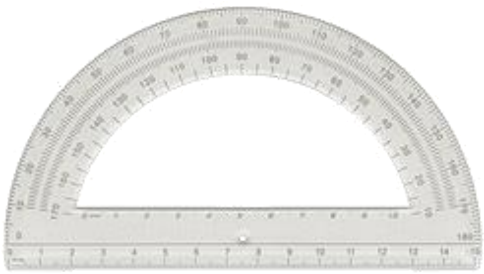
El sistema centesimal, utilizado en muchos instrumentos topográficos y en sistemas militares, divide el ángulo giro en 400 partes, llamadas *grados centesimales (g)*. Este sistema utiliza una base 10 como nuestro sistema numérico, así que cada unidad está compuesta por 10 sub-unidades

RADIAL

El sistema radial es un sistema de medición de ángulos que destaca por su importancia y su uso en el estudio de la trigonometría.
Aparentemente es más complejo porque, a diferencia de los demás sistemas que dividen el ángulo giro en un número finito de partes iguales, en este sistema la unidad de medida no se obtiene fraccionando un ángulo giro. El *radián (rad)* es la medida de un ángulo central que subtiende a una longitud de arco de circunferencia igual al radio.

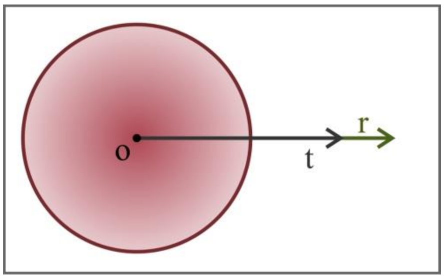


La amplitud de un ángulo se puede medir a través de diferentes instrumentos de regular complejidad. El transportador, es la herramienta de escritorio más utilizada para medir los ángulos. Para medir un ángulo en grados, se alinea el lado inicial del ángulo con el radio derecho del transportador (semirrecta de 0°) y se determina en sentido contrario al de las manecillas del reloj la medida que tiene. En caso que sea necesario se prolongarán los brazos del ángulo para mejor visibilidad.



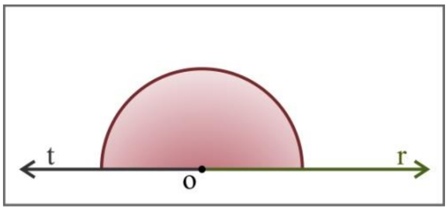
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS POR SU AMPLITUD

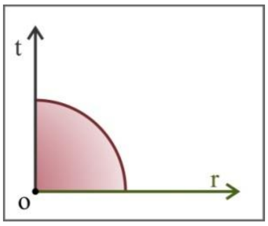
● Se pueden clasificar los ángulos según su amplitud. Para todos, la referencia es el *ángulo giro*, llamado así porque corresponde a una vuelta completa.



Su amplitud corresponde a la totalidad del plano. En el sistema sexagesimal el ángulo giro corresponde a 360°, en el sistema centesimal corresponde a 400^g mientras en el sistema radial corresponde a 2π rad.

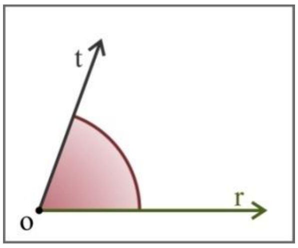
● La mitad de un ángulo giro se llama *ángulo llano*. Es el ángulo formado por dos semirrectas alineadas. Estas dividen el plano en dos partes iguales. Su medida es de 180°.

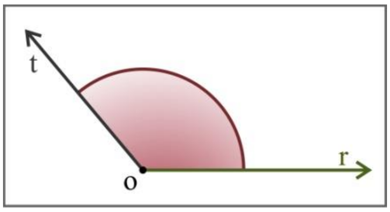




● La cuarta parte de un ángulo giro se llama *ángulo recto*, es formado por dos semirrectas perpendiculares. El ángulo recto mide 90°

● El *ángulo agudo* es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0°, pero menor que 90°.

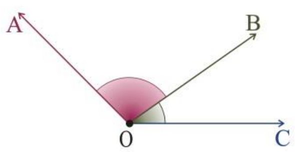
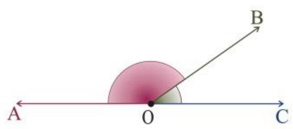
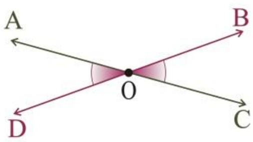




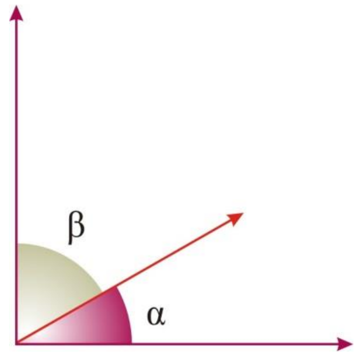
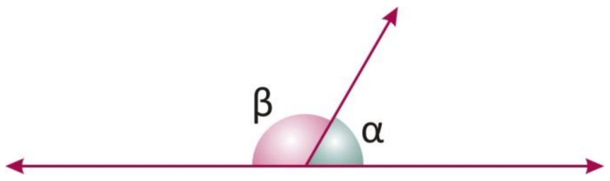
● El ángulo cuya medida es mayor que 90°, pero menor que 180° se llama *ángulo obtuso*.

También se pueden clasificar los ángulos por su amplitud en dos grandes bloques los convexos y los cóncavos. Se llama *ángulo convexo* aquel cuya medida es mayor que 0° pero menor que 180°. Los ángulos cuyas medidas supera los 180° y se mantienen inferiores a 360° se *llaman cóncavos*

ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN.

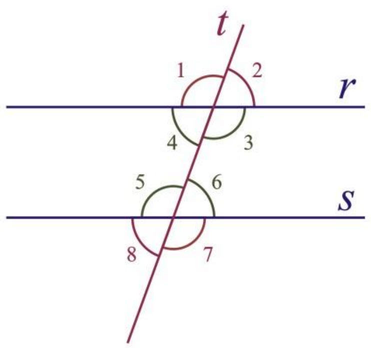
Consecutivos	*Adyacentes*	*Opuestospor el vértice*
Tienen el vértice y un lado en común. 	Tienen un lado en común y sus lados no son comunes son dos rayos opuestos. 	Tienen el mismo vértice y sus lados son rayos opuestos. 
AÔB y BÔC son ángulos consecutivos.	AÔB y BÔC son ángulos adyacentes: $\alpha + \beta = 180º$	AÔD y BÔC son ángulos opuestos por el vértice: $\alpha = \beta$.

ÁNGULOS SEGÚN SU AMPLITUD

Ángulos Complementarios	*Ángulos Suplementarios*
El ***complemento*** de un ángulo es lo que le falta al ángulo para medir 90º 	El ***suplemento*** de un ángulo es lo que le falta al ángulo para medir 180º 
el ánguloβ más el ángulo α deben sumar 90º	el ánguloβmás el ángulo α deben sumar 180º

ÁNGULOS FORMADOS POR UN HAZ DE RECTAS

Al cortar dos rectas paralelas “*r*” y “*s*” por una tercera recta “*t*” secante a estas, se forman 8 ángulos, 4 en cada punto de intersección.



Los ángulos *∠1* y *∠3*, *∠2* y *∠4*, *∠5* y *∠7*, *∠6* y *∠8* forman pares de ángulos opuestos por el vértice por eso son congruentes entre ellos.

Siendo *r* y *s* dos rectas paralelas, la recta t las incide con una igual inclinación así que los ángulos **∠2**y**∠6** son congruentes.

De esta forma se afirma que los ángulos *∠1*,*∠3*,*∠5*y *∠7* son congruentes como también los ángulos *∠2*,*∠4*,*∠6* y *∠8*.

Las rectas *r* y *s* dividen el plano en tres partes. Llamaremos parte interna la porción del plano delimitada por ambas rectas. Según la posición que los ángulos tienen respecto a estas tres zonas podemos decir:

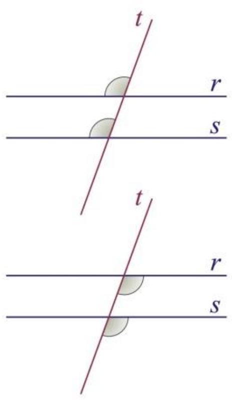
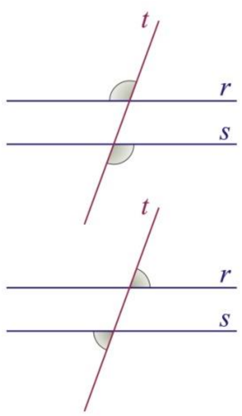
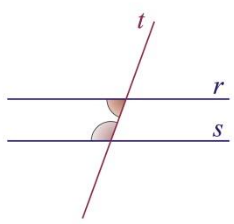
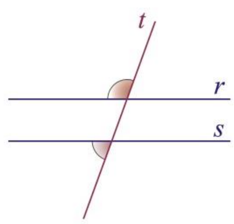
- Los ángulos **$\angle 4, \angle 3, \angle 5, \angle 6$** son llamados *internos*, porque están internos a las 2 rectas paralelas "*r*", "*s*";
- Los ángulos; **$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$** son llamados ángulos *externos*, porque están externos a las 2 rectas paralelas "*r*" y "*s*".

La recta *t* divide el plano en dos mitades. Los ángulos **$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$**están todos contenidos en el semiplano izquierdo. Estos se llaman ángulos conjugados. Al igual también los ángulos **$\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$**, son conjugados por ser todos contenidos en el semiplano derecho.

Los ángulos**$\angle 4$** y **$\angle 5$**, **$\angle 3$** y **$\angle 6$**son llamados *conjugados internos*, mientras los ángulos **$\angle 1$** y **$\angle 8$**, **$\angle 2$** y **$\angle 7$** son llamados *conjugados externos.*

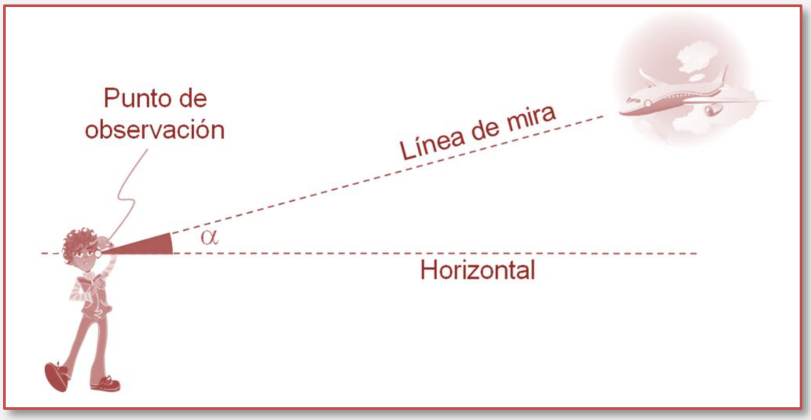
Cuando las rectas *r* y *s* son paralelas los pares de ángulos conjugados, internos y externos, son suplementarios, o sea suman 180°.

Por la posición que ocupan, los ángulos formados por un haz de rectas paralelas cortadas por una secante, se pueden clasificar de la siguientes manera:

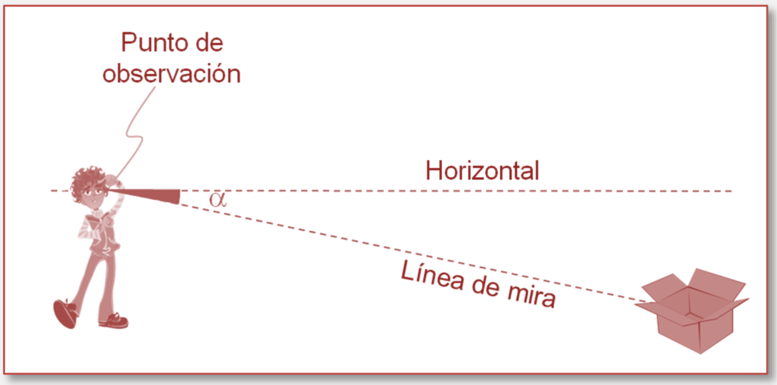
CORRESPONDIENTES	***ALTERNOS***	***CONJUGADOS INTERNOS***	***CONJUGADOS EXTERNOS***
			

ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN: aplicaciones de los ángulos en la vida de cada día

Angulo de elevación: es el ángulo vertical formado por la línea horizontal y la línea de mira que pasa por el punto observado. Este punto está por encima de la horizontal.



Ángulo de depresión: es el ángulo vertical formado por la línea horizontal y la línea de mira que pasa por el punto observado. Este punto está por debajo de la línea horizontal.



Rumbos: el rumbo es la dirección del rayo a lo largo del cual recorre un móvil o una persona. Esta dirección está dada por el ángulo agudo que forman el rayo y la recta norte sur. Por ello, la lectura y escritura del rumbo siempre está referida al norte (N) o al sur (S) e indica hacia dónde se ha medido: hacia el este (E) o hacia el oeste (O).

El aprendiz topógrafo

El clinómetro es un instrumento topográfico con el cual se puede determinar la inclinación de un determinado plano u línea recta, la plataforma de una carretera, la superficie de un terreno o de un talud, el trazo de un canal etc.

Los topógrafos utilizan este instrumento para medir inclinaciones o para buscar los puntos de un trazo con una dada inclinación.

Construir un clinómetro casero

Para construirlo: Se necesita una pieza rectangular de cartón duro (de unos 12x32 cm). Se recorta un área rectangular como en la figura 1, con el fin de colocar ahí la mano. Se colocan dos escarpias redondas en el lado.

En un cuadrante de papel, con los ángulos indicados Se ata una cuerda en la parte de arriba y, en la otra punta, se fija un pequeño peso que indique el ángulo de 90° (figura 1).

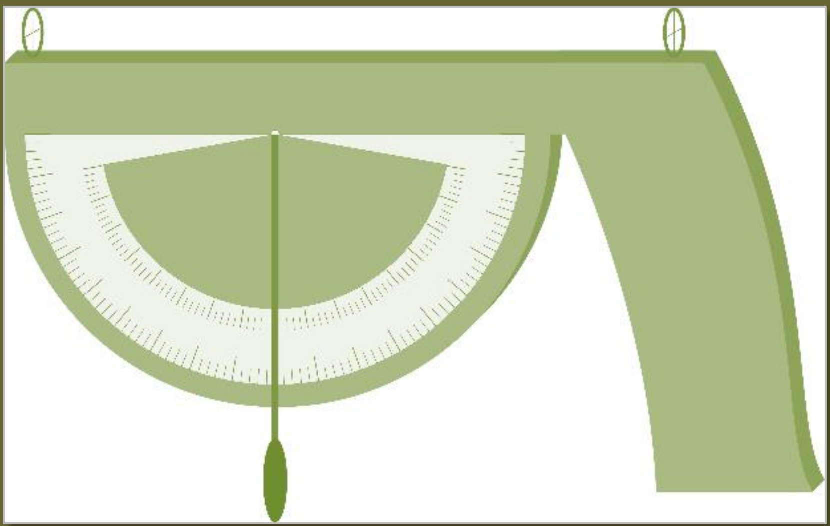
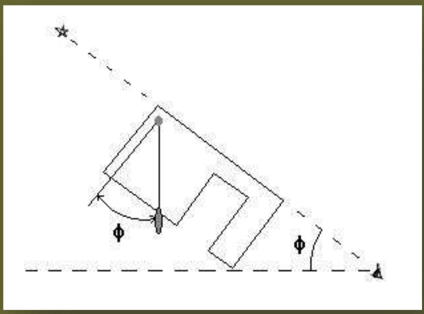


Figura 1. Clinómetro

¿Cómo usarlo?

Cuando se ve el objeto a través de las dos escarpias la cuerda indica la posición angular referida a 0º del horizonte.

Una pajita que pase a través de las escarpias es un visor excelente que nos permitirá calcular la inclinación proyectando la imagen en un trozo de cartón blanco.



¡Ahora prueba tú!

Medición de la inclinación de una carretera cercana a la institución educativa:

con un grupo de estudiantes se va a medir la inclinación de algunos tramos de la carretera, todas las mediciones se harán con el clinómetro y un asta cuya altura se ajustará a la altura de los ojos del observador.

Fijado el tramo de la carretera que se va a medir, se pone un punto de referencia donde se ubica el instrumento topográfico, el ayudante se ubicará con la varilla en el segundo punto, para determinar la inclinación de la carretera, el topógrafo deberá graduar el clinómetro respecto al segundo punto; se realizarán varias mediciones en diferentes tramos para conocer las diversas inclinaciones.

¡Listos? ¡A medir!

EJERCICIOS:

1. En un desierto de África dos autos parten de un mismo punto con direcciones distintas, formando un ángulo de 75°. Gráfica y determina qué tipo de ángulo formaron los dos autos.

2. Con el uso del transportador dibuja y determina qué tipo de ángulos son los siguientes:

a) 90° **b)** 120° **c)** 18°

d) 150° **e)** 360° **f)** 180°

3. Halla la medida de un ángulo si equivale a un tercio de la medida de su suplemento.

4. Dados dos ángulos complementarios α y β; si se disminuye 18° a uno para agregárselo al otro, resultan ángulos de igual amplitud. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

5. Si al suplemento del triple de un ángulo le restamos la mitad de su complemento, obtenemos el doble de dicho ángulo. Halla el suplemento del complemento del ángulo.

6. Halla la medida de un ángulo si la diferencia entre el doble de su suplemento y el triple de su complemento es igual al cuádruple del ángulo.

7. El complemento de un ángulo α es igual al suplemento del triple de α. ¿Cuál es el valor de α?

8. Sean ∠AOB, ∠BOC y ∠COD ángulos consecutivos. Si la suma de las medidas de los ángulos es *mAOC+mBOD=140º*, determina la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos ∠AOB y ∠COD.

9. La diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes ∠AOB y ∠BOC es 30º. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por la bisectriz de ∠AOC con el rayo OB?

10. La suma del suplemento y del complemento de un ángulo es 150º. ¿Cuál es la medida de dicho ángulo?

11. Sean los ángulos consecutivos ∠AOB, ∠BOC y ∠COD, de modo que las medidas *mAOB=20º*, *mBOC = 30º* y *mAOD= 70º*. Calcula la medida del ángulo que forma la bisectriz de C∠OD con el segmento OB.

12. Se tienen los ángulos consecutivos ∠AOB y ∠BOC (con ∠BOC mayor). Se traza la bisectriz OM del ángulo ∠AOC. Si∠ BOC y ∠BOM miden 60º y 20º, respectivamente, ¿cuál es la medida del ángulo ∠AOB?

13. Se tienen los ángulos consecutivos ∠AOB y ∠BOC. Calcula la medida del ángulo formado por las bisectrices de ∠AOB y ∠AOC si se sabe que *mAOC −mAOB=26º.*

14. Un ángulo llano es dividido en cuatro ángulos consecutivos proporcionales a 1; 2; 3 y 4. Calcula la medida del ángulo formado por las bisectrices del ángulo menor y del ángulo mayor.

15. Se tienen los ángulos consecutivos ∠AOB, ∠BOC y ∠COD donde ∠AOB y ∠BOC son adyacentes suplementarios, y ∠BOC y ∠COD son adyacentes complementarios. Halla la medida del ángulo formado por las bisectrices de ∠AOB y ∠COD.

16. Sean los ángulos consecutivos ∠AOB, ∠BOC y ∠COD. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos ∠AOB y ∠COD si *mAOC+mBOD=150º*?

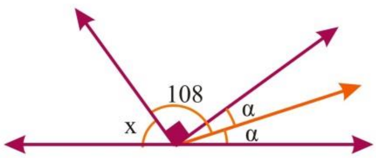
17. El complemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo α es igual al doble del complemento del ángulo α. Calcula la medida del ángulo α.

18. La suma de las medidas de dos ángulos es 110º y el complemento del primer ángulo es el doble de la medida del segundo ángulo. ¿Cuál es la diferencia de las medidas de dichos ángulos?

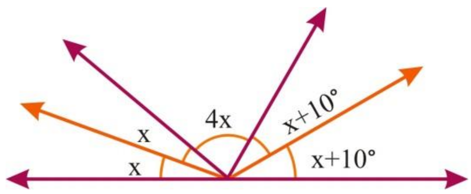
19. La suma de los complementos de dos ángulos es 130º y la diferencia se sus suplementos es 10º. ¿Cuál es la medida de dichos ángulos?

20. Calcula el valor de x en cada caso.

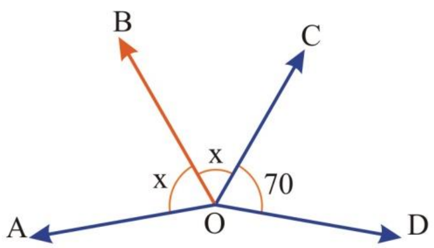
a)



b)



c) Si $mA\hat{O}C + mB\hat{O}D = 280°$



"EL ÁNGULO DEL TIEMPO"

La trigonometría es una herramienta que permite calcular ángulos y distancias de forma indirecta.

Ponemos en práctica los conceptos básicos de la trigonometría, en la medición de los ángulos que las agujas del reloj forman en el transcurrir de las horas, sin el utilizo de transportadores, sino, solamente jugando con los conceptos de los ángulos y la observación del movimiento del reloj.

En el reloj la aguja del horario y la del minutero describen diferentes ángulos al pasar de las horas. Al pasar cada minuto la aguja del minutero gira de un ángulo correspondiente a 6º sexagesimales, la sexcentésima (1/60) parte del ángulo giro, recorrido que cumple al transcurrir de una hora. Al pasar cada hora la aguja del horario gira de un ángulo correspondiente a 30º sexagesimales, la duodécima parte del ángulo giro.

Ejemplo:

a las 12:25, las agujas del reloj describen un ángulo **α** de 137.5º

DESARROLLO

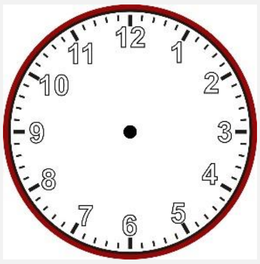
Sabemos que la aguja que marca los minutos, en cada minuto que transcurre, gira de 6º, entonces en 25 minutos, el minutero habrá girado de 150º. En cambio la aguja que indica las horas, en cada minuto que transcurre muestra un giro de 0,5º, por lo tanto en 25 minutos habrá recorrido un ángulo de 12.5º.

El ángulo formado a las 12:25, entre la aguja que indica el minuto y la aguja que indica la hora es: "el ángulo formado por la aguja que marca el minuto menos el ángulo que ha descrito la aguja del horario".

150 - 12.5º=137.5º

Ejercicios

1. Calcula las medidas angulares de las siguientes horas que marca el reloj.

	A las 3:35 ¿cuál es la medida del ángulo α y del ángulo β?		Halla la hora exacta que marca el reloj de la figura. Sabiendo que α es igual a 141.5º.
	A la 1:50 ¿cuál de los ángulos es menor y cuánto mide?		¿Cuánto miden los ángulos que recorrieron el minutero y el horario, cuando las manecillas marcan las 4 de la tarde con 42 minutos?

2. Luis salió del colegio a la 1 de la tarde con x minutos. Si las agujas del reloj formaban 127º, ¿a qué hora salió Luis?

3. ¿A qué hora, entre las 4 y las 5 pm, el minutero adelanta a la marca de las 9 tantos grados como los 3/4 del ángulo barrido por el horario desde las 4 pm en punto?

4. ¿Qué ángulo forman entre sí las manecillas de un reloj a las 16h y 24 minutos?

5. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 19h y 20 minutos?

6. Se construye un reloj que tiene el horario más grande que el minutero. Cuando una persona observa la hora marcada en el reloj, ve las 9h 29minutos. Si el ángulo que forman las manecillas es 114°, ¿Qué hora es en realidad?

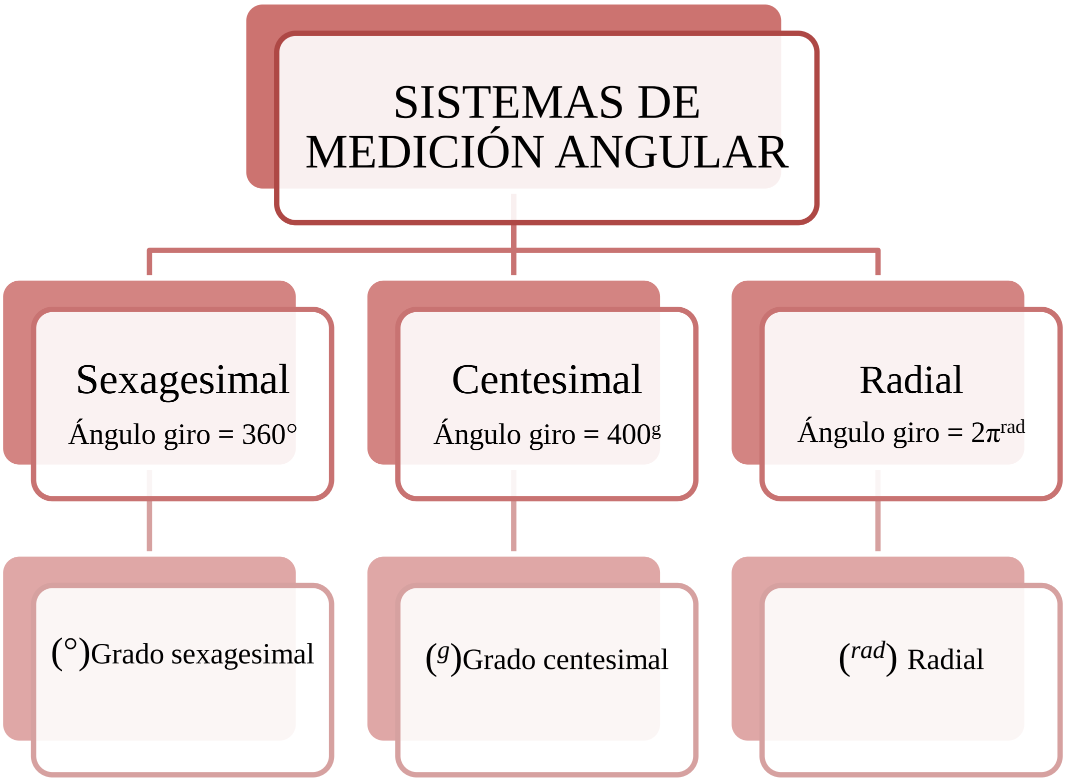
7. ¿En qué momento las agujas de un reloj forman un ángulo de 120° entre las 8:00h y las 9:00h?

8. Debido a una falla mecánica, las manecillas de un reloj forman a las 3:00h un ángulo de 80°. ¿Qué ángulo formará a las 4h y 40 minutos?

RELACIÓN DE CONVERSIÓN DE LOS TRES SISTEMAS

Como ya se ha visto en los párrafos anteriores, se puede medir la amplitud de un ángulo usando diferentes sistemas de medidas.

El ángulo giro por ejemplo se puede expresar como el ángulo cuya amplitud mide 360°, pero podemos expresarlo como $2\pi^{rad}$ o 400^g; esto porque cada sistema de medición tiene su unidad de medida. Así un mismo ángulo puede ser expresado a través de diferentes medidas.



Existe entonces una relación bien determinada entre estos tres sistemas de medición que nos permite pasar de uno a otro.

Para pasar de los grados sexagesimales a los grados centesimales y a los radiantes se utilizan las siguientes igualdades:

De Sexagesimal a	
Centesimal	*Radial*
$\frac{S^\circ}{180} = \frac{C^g}{200}$	$\frac{S^\circ}{180} = \frac{R^{rad}}{\pi}$

De estas igualdades se extraen las formulas:

$$C^g = 200 \times \frac{S^\circ}{180}$$

$$R^{rad} = \pi \times \frac{S^\circ}{180}$$

De Centesimal a	
Sexagesimal	*Radial*
$\boldsymbol{\frac{C}{200} = \frac{S}{180}}$	$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} rad$

De estas igualdades se extraen las formulas:

$$S^{\circ} = 180 \times \frac{C^{g}}{200}$$

$$R^{rad} = \pi \times \frac{C^{g}}{200}$$

De Radial a	
Sexagesimal	*Centesimal*
$\boldsymbol{\frac{R}{\pi} rad = \frac{S}{180}}$	$\frac{R}{\pi} rad = \frac{C}{200}$

De estas igualdades se extraen las formulas:

$$S^{\circ} = 180 \times \frac{R^{rad}}{\pi}$$

$$C^{g} = 200 \times \frac{R^{rad}}{\pi}$$

El aprendiz topógrafo

En su profesión, el topógrafo, se enfrenta con el uso de diferentes sistemas de medidas, diferentes sistemas de referencias etc. Entre estos casos, un ejemplo que todos conocemos es lo que se presenta al medir el amplitud los ángulos.

Existen diversos sistemas de unidad de medida para los ángulos, entre los más usados en el mundo de la topografía resaltan el sistema sexagesimal, sistema centesimal y el sistema radial.

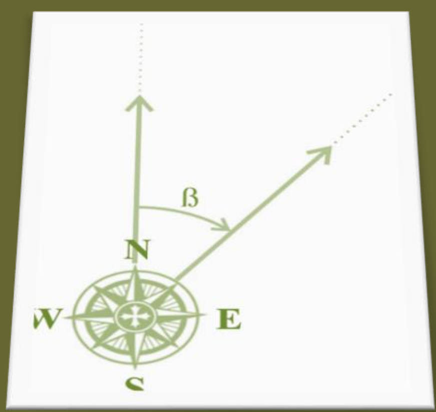
Los topógrafos trabajan siempre con medidas de longitudes y con medidas de ángulos, y es muy frecuente que un topógrafo tenga la necesidad de convertirlos de un sistema a otro.

Todos los sistemas de medición de los ángulos consideran como referencia el ángulo giro y comparan la amplitud de cada ángulo con la amplitud de este. Así que la amplitud de un ángulo siempre nos indica a que parte de un ángulo giro corresponde. Para pasar de un sistema al otro se utilizan unas fórmulas de conversión; esta es una operación fácil pero requiere mucha práctica para poder transportar, con precisión y rapidez, los ángulos de un sistema al otro.

¡Ahora prueba tú!

Con el auxilio de un transportador horizontal vamos a medir diferentes ángulos para luego convertirlos en los diferentes sistemas de medida.

En el patio del colegio se individua un punto fácilmente accesible y con una buena visual, del cual sea posible ver claramente varios puntos significativos del entorno natural o antrópico (un árbol grande, una rajadura en la roca, la punta de un cerro, la torre campanaria, el antena de una radio, una cruz plantada en la cumbre de un cerro etc.)



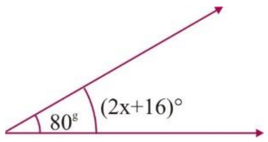
Se posiciona el transportador horizontal en el punto elegido y se establece la pareja de puntos de los cuales se quiere medir la distancia angular.

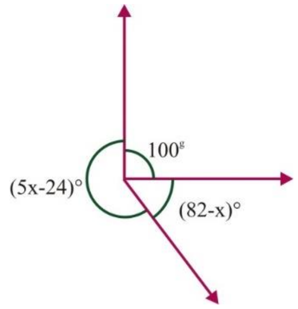
Apuntando con el instrumento el primer punto se pone en cero el transportador, luego se apunta al segundo punto y se lee la apertura angular.

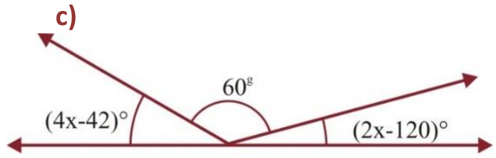
Ahora finalmente podemos convertir los ángulos medidos en los diversos sistemas de medida. ¿Listos?

¡A medir!

EJERCICIOS:

1. Convertir los siguientes ángulos, expresados en grados sexagesimales, a grados centesimales y radianes
   a) 36° b) 45°
   c) 10° d) 54°
   e) 230° f) 310°
   g) 150° h) 270°
2. Convertir los siguientes ángulos, expresados en grados centesimales, en grados sexagesimales y radianes.
   a) 30^g b) 45^g
   c) 10^g d) 50^g
   e) 230^g f) 310^g
   g) 150^g h) 270^g
3. Convertir los siguientes ángulos, expresados en radiantes, en grados sexagesimales y centesimales.
   a) $\frac{\pi \text{ rad}}{5}$ b) $\frac{\pi \text{ rad}}{4}$
   c) $\frac{\pi \text{ rad}}{18}$ d) $\frac{3\pi \text{ rad}}{10}$
4. Transformar al sistema radial:
   a) 54° b) 60º
   c) 100^g d) 40^g
5. Transformar al sistema sexagesimal
   a) $\frac{4\pi \text{ rad}}{3}$ b) $\frac{\pi \text{ rad}}{6}$
   c) 10^g d) 50^g
6. Transformar al sistema centesimal
   a) 60º b) 81º
   c) 1º d) 13°30´
   e) 5π rad f) $\frac{\pi \text{ rad}}{8}$
7. Determinar el valor de "*x*" en las siguientes figuras:
   a)


   b)


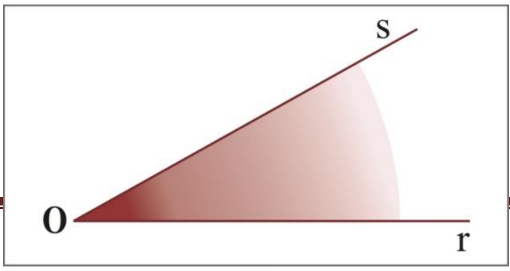
   c)


8. Un alumno en vez de escribir 30° escribe 30^g. ¿Qué error cometió en grados sexagesimales?
9. Tres ángulos consecutivos están de manera tal que el lado inicial del primero y el lado final del tercero son rayos opuestos. Expresa la medida de dichos ángulos en radianes si se sabe que están en relación de 1; 2; y 3.
10. Se tienen dos ángulos complementarios cuyas medidas son 6*x* y 3*x*. Expresa en grados centesimales la medida de dichos ángulos

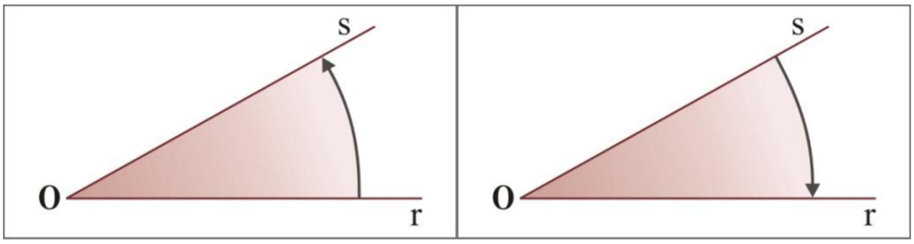
ÁNGULOS ORIENTADOS.

En algunos problemas es conveniente dar a los ángulos una orientación o sentido. Un ángulo se dice orientado cuando se establece cuál de los dos lados debe considerarse el primero.

Así el ángulo α de vértice O, delimitado por las semirrectas ***r*** y ***s***, puede formarse a partir de la rotación del lado *r*, primer lado del ángulo, hasta formar el lado *s*. Esto se indica con la notación $r\angle s$. Al contrario si



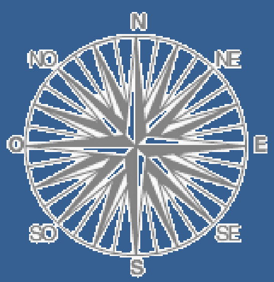
se establece que el ángulo se ha formado por la rotación del lado *s*, primer lado del ángulo, la notación será $s\angle r$. De esta manera el ángulo a pesar que tenga una misma amplitud puede tener dos distintas orientaciones y asignaremos a cada una de ellas un signo positivo o negativo.



En la *figura*se puede apreciar que los dos ángulos, tienen una misma amplitud, pero diferente orientación. La flecha en el arco nos indica el sentido de la rotación que ha formado cada ángulo, de ***r*** a ***s*** en el primer caso y de ***s*** a ***r*** en el segundo. Estos ángulos se dicen uno opuesto del otro y se le asigna un signo positivo a uno y negativo al otro, según una determinada convención.

El uso de ángulos orientados está relacionado a múltiples actividades humanas como la cartografía, la topografía, la astronomía, la física etc. En cada campo y en cada situación se determina una convención específica para determinar el signo de los ángulos.

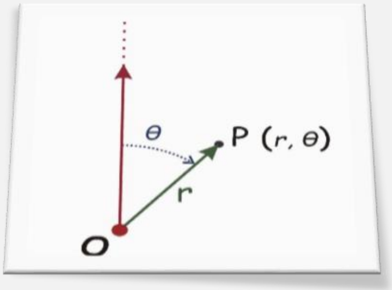
En trigonometría se asigna un valor positivo a los ángulos formados por la rotación del primer lado, lado de origen, en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, rotación anti-horaria.



Los navegantes se orientan y dan el rumbo a su barco gracias a la “rosa de los vientos”. En ella los ángulos son orientados según los cuatro puntos cardenales.

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Las *coordenadas polares* son un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un par ordenado. Los elementos de este par ordenado son respectivamente una distancia y un ángulo llamado *azimut* medidos a partir de un sistema de referencia.



El sistema de referencia cuenta con un punto *O* llamado *origen* o *polo*, y una semirrecta, que tiene origen en el polo O llamado *eje polar*.

Con este sistema de referencia y establecida una unidad de medida métrica, todo punto ***P*** del plano corresponde a un par ordenado *(r, θ)* donde *r* es la distancia de *P* al *origen* y ***θ*** es el ángulo orientado formado entre el eje polar y la recta dirigida *OP* que va de *O* a ***P***.

Los ángulos en notación polar son ángulos orientados, es decir en el sistema de coordenadas polares se considera el signo del ángulo según si la rotación del eje polar ha sido horaria o anti-horaria según convenciones que varían en los diferentes campos de aplicación de este método.

En muchos casos se utiliza como eje polar la dirección del norte, así que para la orientación de los ángulos se utilizan los puntos cardinales (ej. 30° Este, 47° Oeste).

En este sistema los ángulos se expresan normalmente en grados sexagesimales o en radiantes, dependiendo del contexto, por ejemplo, las aplicaciones de navegación marítima utilizan las medidas en grados, mientras que algunas aplicaciones físicas y la mayor parte del cálculo matemático expresan las medidas en radiantes.

Las coordenadas polares sirven al topógrafo para poder determinar la ubicación en el terreno de un conjunto de puntos y luego poderlos representar en un mapa.

ITINERARIO DE ÁNGULOS

Cada jugador dispone de un mapa a gran escala, el mismo para todos, donde está indicada claramente la orientación. El profesor indica un lugar sobre el mapa que servirá de punto de partida (esta indicación puede hacerse claramente, o por medio de comparaciones o sistema de eliminación). Cada jugador clava un alfiler en el punto de partida (es conveniente proteger al mapa de las miradas vecinas). Seguidamente, el profesor indica una distancia y una dirección mediante ángulos de azimut, por ejemplo:

(40 ° Norte; 200 metros); o (25°Este ; 150 metros)

El jugador clava otro alfiler en el lugar que cree que corresponde según las indicaciones que dio el jefe de juego. Este lugar generalmente es un cruce de caminos, una casa aislada, una esquina de un bosque, Etc. De esta forma, el profesor provee sucesivamente las indicaciones que componen un itinerario seguido en zigzag. En el último lugar indicado, el profesor anuncia "META". Cada uno quita su pantalla o destapa su mapa. Se comparan los resultados dando 1 punto negativo por error. La clasificación se efectúa en sentido proporcional inverso al número de puntos.

El aprendiz topógrafo

Los topógrafos utilizan las coordenadas polares para tomar medidas de los linderos de las parcelas de terreno, para realizar mapas. Ellos disponen de instrumentos de gran precisión como el teodolito y la estación total.

Para poder medir un terreno y luego poder representarlo en el mapa, los topógrafos fijan en el terreno un punto llamado estación. Ponen una marca bien firme en el terreno y allí colocan su instrumento.

Después de esto, eligen un punto bien visible, también lejos de la estación; apuntando con el instrumento usado, ajustan su transportador de ángulos Horizontal en cero. Este es el azimut.

Para tomar las medidas, el topógrafo apuntando con el teodolito el punto a medir, lee registra en su cuaderno de campaña la medida del ángulo azimutal, y la distancia.

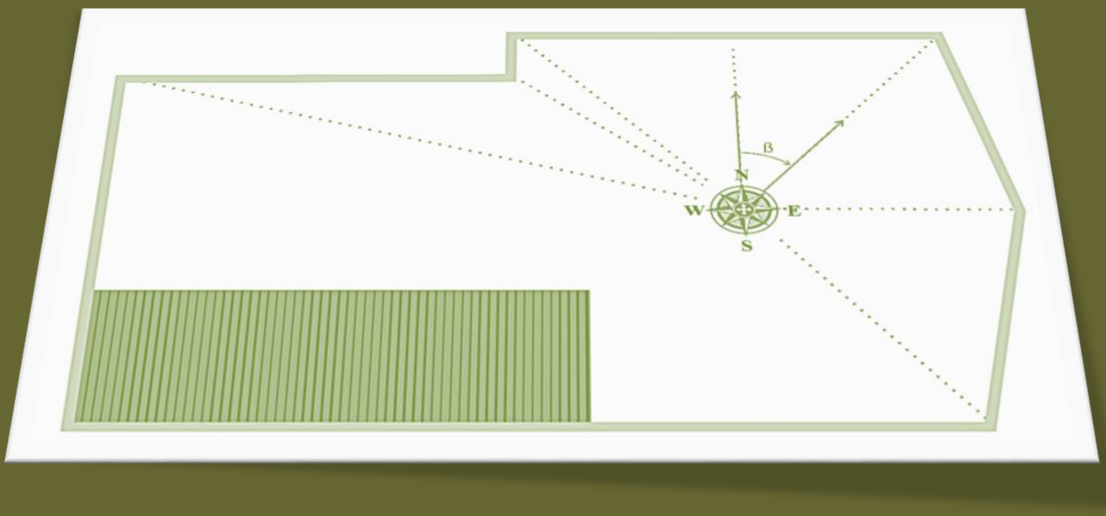
Una vez tomadas las medidas de todos los puntos, con el uso del trasportador y de una regla el topógrafo representa gráficamente el terreno en un mapa.

¡Ahora prueba tú!

Junto a tus compañeros construye el transportador horizontal como en la figura o procúrate una brújula para excursionismo. Busca en la casa una huincha métrica y tu cuaderno de campaña para tus apuntes.

Ahora puedes levantar el plano del patio de tu colegio.

Dibuja en el cuaderno un croque del patio de tu colegio, definiendo los puntos del contorno que vas a medir y el punto que representará el azimut. Elige en el patio un lugar, de donde puedas observar todos los puntos significativos (esquinas). Está será tu estación.



Elige un punto firme para determinar tu eje polar, si utilizas la brújula este será la dirección del norte magnético.

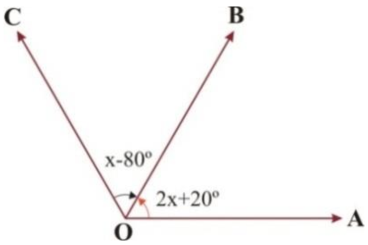
Ahora deberás solo apuntar con el trasportador horizontal o brújula los puntos que quieres medir, y con la huincha medir la distancia de estos con la estación. Apuntaras cada medida en tu cuaderno de campaña.

Acabado el trabajo de medición dibuja en un papel bon el mapa y compáralo con lo de tus compañeros.

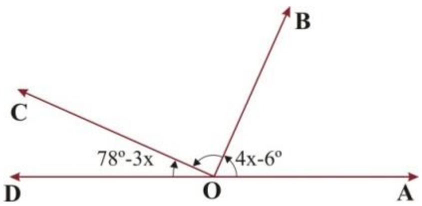
¡Todos al trabajo!

EJERCICIOS

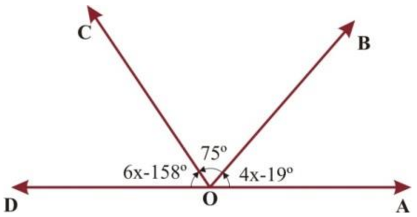
1. En la figura, halla el valor de x si $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz.



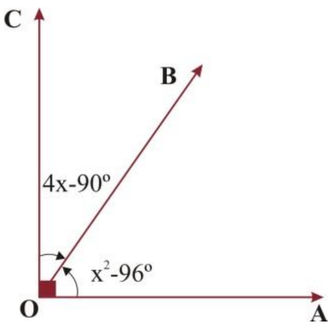
2. En la figura, halla el valor de x si mBOC=90°.

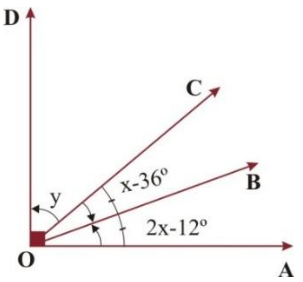


3. Determina el valor de x.

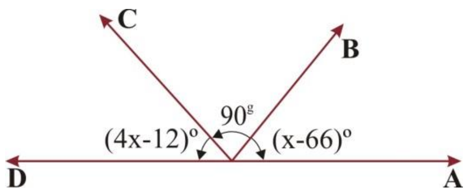


4. Determina el valor de x e y.



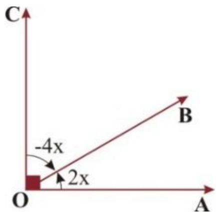


5. Determinar el valor de x:

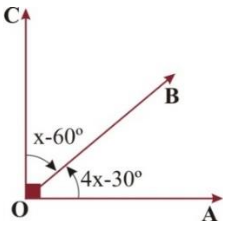


6. Determinar el valor de x:

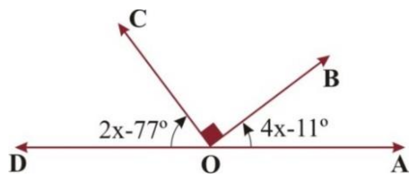
a)



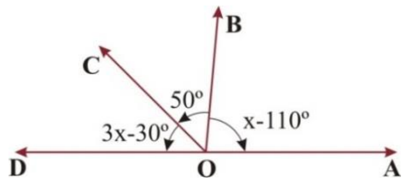
b)



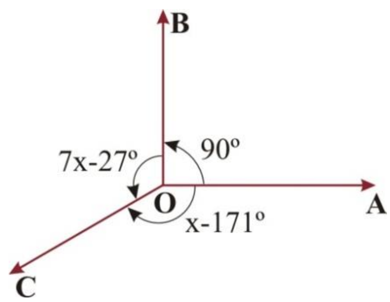
c)



d)



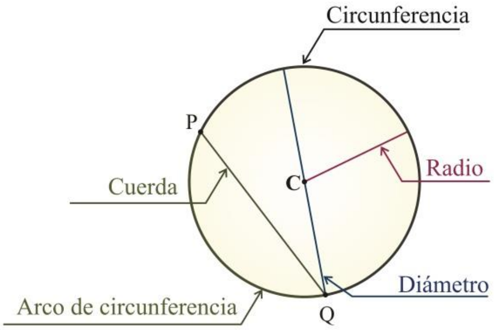
e)



SENO Y COSENO

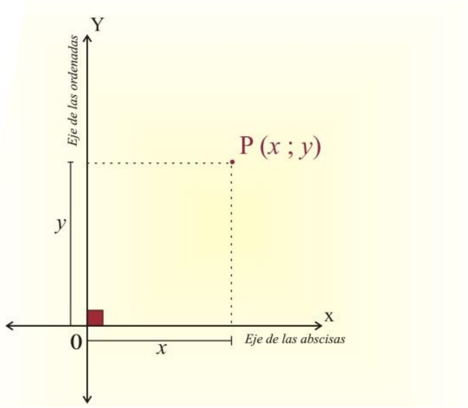
CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Para poder definir la circunferencia trigonométrica, primeramente debemos recordar la definición de círculo y de circunferencia. Muchas veces nos equivocamos en ambas definiciones.

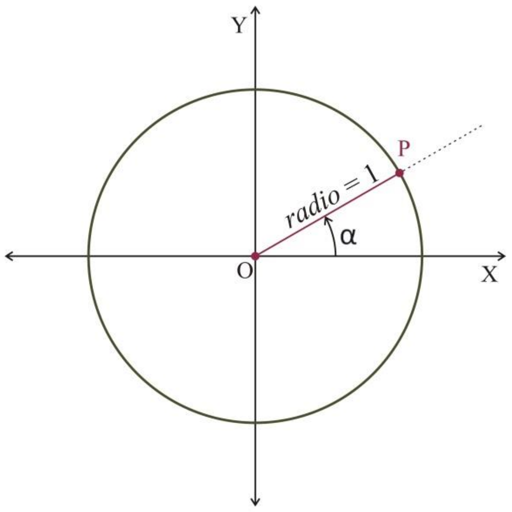


El *círculo* es una porción del plano que está delimitada por la *circunferencia*, esta es una línea curva cerrada, que se caracteriza por tener todos sus puntos equidistantes de un punto, llamado *centro* de la circunferencia. La distancia entre cada uno de los puntos de la circunferencia con el centro se llama *radio*. Definidos dos puntos en la circunferencia, se llama *arco de circunferencia* la porción de circunferencia delimitada por estos. Se llama *cuerda* en vez, el segmento que los une. La cuerda máxima que se pueda trazar en una circunferencia cualquiera es la que pasa por el centro y se llama *diámetro* y mide dos veces la longitud del radio.

Consideramos un *Plano Cartesiano*, o sea un plano en el cual se define un sistema de referencia constituido por dos rectas perpendiculares que lo dividen en cuatro partes llamadas *cuadrantes* y cuyos puntos están definidos en forma univoca por un par ordenado de números reales llamado *coordenadas cartesianas*; estas representan las distancias del punto respectivamente del eje vertical y del eje horizontal.



Se define *circunferencia trigonométrica* aquella cuya medida del radio es igual a la unidad de medida del sistema cartesiano y tiene el centro coincidente con el origen del sistema de referencia.



Podemos observar que un ángulo orientado α determina un único punto P en la circunferencia trigonométrica, que es la intercesión entre la circunferencia y el segundo lado de α. Este, como todo punto del plano cartesiano, tiene como coordenadas (x; y)

Ángulo normal

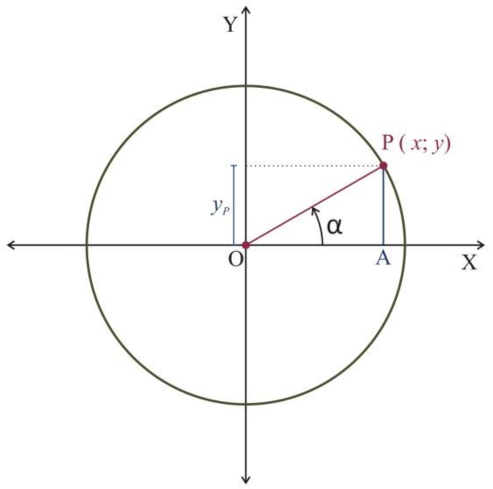
Un ángulo trigonométrico está en posición normal, *ángulo normal*, cuando el lado inicial coincide con el lado positivo del eje de las abscisas, su vértice coincide con el origen del plano, y su lado final está en cualquier cuadrante del plano.

DEFINICIÓN DEL SENO Y DEL COSENO

El seno y el coseno de un ángulo son números puros que dependen solamente de su amplitud. Cada uno tiene un diferente significado.

Seno

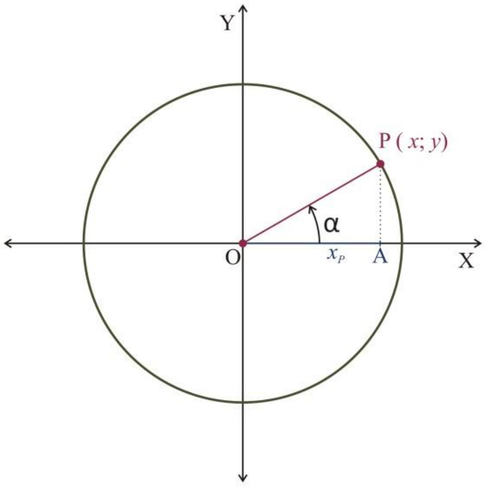
El seno geométricamente representa el cociente entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre α. Para definir el seno del ángulo orientado α utilizamos la circunferencia trigonométrica:



El seno del ángulo orientado α es la ordenada de la intercesión entre la circunferencia trigonométrica y el segundo lado del ángulo, o sea el punto P.

Coseno

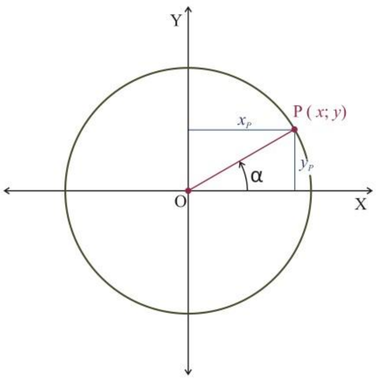
El coseno geométricamente representa el cociente entre el cateto adyacente al ángulo α y la hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre α. Utilizando la circunferencia trigonométrica, se puede definir el coseno de un ángulo de la siguiente manera.



El coseno del ángulo orientado α es la abscisa de la intercesión entre la circunferencia trigonométrica y el segundo lado del ángulo, o sea el punto P.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Sea α un ángulo que está en posición normal y el punto P (*x;y*) un punto cualquiera del segundo lado de α; entonces el seno de α es el cociente de y_p y el segmento $\overline{OP}$. El coseno será el cociente entre x_p y el segmento $\overline{OP}$.

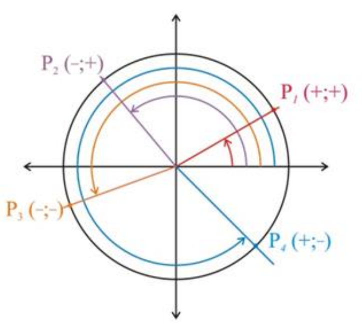
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
$sen\alpha = \frac{y_p}{\overline{OP}}$	
$cos\alpha = \frac{x_p}{\overline{OP}}$	

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los signos de las razones trigonométricas de un ángulo α dependen únicamente de los signos de las coordenadas del punto P, asociado a dicho ángulo α; es decir que dependen de los signos de las coordenadas de un punto cualquiera de lado final del ángulo.

Según esto, los signos de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes son los que se indican a continuación.

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS		
	sen α	*cos α*
I cuadrante	+	+
II cuadrante	+	−
III cuadrante	−	−
IV cuadrante	−	+

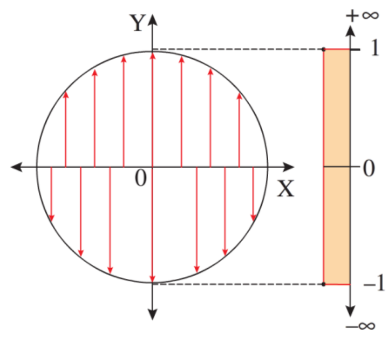


LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

Observando la posición del punto P y su desplazamiento sobre la circunferencia trigonométrica al variar del ángulo orientado α, se puede notar que su ordenada crece al aumentar la amplitud del ángulo en el primer cuadrante hasta alcanzar un máximo por una amplitud de 90°. En este punto la ordenada de P vale 1.

Mientras aumenta la amplitud de *α*, a través del segundo y tercer cuadrante, la ordenada de P decrece y su valor es nulo por α igual a 180°, alcanzando el mínimo en 270° donde vale -1.En el cuarto cuadrante, al aumentar el amplitud de α aumenta la ordenada de P que vuelve a 0 en 360°.

Variación del seno en los cuatro cuadrantes



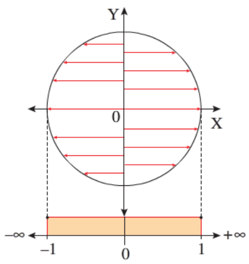
Ángulos α		*sen α*
0°	*0 rad*	*0*
45°	$^1/_4\pi$ *rad*	$^{\sqrt{2}}/_2$
90°	$^1/_2\pi$ *rad*	*1*
135°	$^3/_4\pi$ *rad*	$^{\sqrt{2}}/_2$
180°	*π rad*	*0*
225°	$^5/_4\pi$ *rad*	$-^{\sqrt{2}}/_2$
270°	$^3/_2\pi$ *rad*	*-1*
315°	$^7/_4\pi$ *rad*	$-^{\sqrt{2}}/_2$
360°	*2π rad*	*0*

En la circunferencia trigonométrica, el seno del ángulo orientado α coincide con la ordenada del punto P (intersección entre el segundo lado de α y la circunferencia).

De manera similar el valor de la abscisa del punto P varía con el variar del ángulo orientado α entre los valores +1 y -1.

A diferencia de la ordenada, por el ángulo nulo la abscisa de P vale 1 y al aumentar el valor de α esta decrece para tomar el valor 0 en 1/2π y llegar a su mínimo, -1, por el ángulo de amplitud π. De esta forma la curva trazada por el valor de la abscisa de P y la amplitud de α resulta ser desfasada respecto a la de la ordenada de 90° es decir de un ángulo de medida ½ π.

Variación del coseno en los cuatro cuadrantes



Ángulos α		*cos α*
0°	*0 rad*	*1*
45°	$^{1}/_{4}\pi$ *rad*	$^{\sqrt{2}}/_{2}$
90°	$^{1}/_{2}\pi$ *rad*	*0*
135°	$^{3}/_{4}\pi$ *rad*	$-^{\sqrt{2}}/_{2}$
180°	*π rad*	*-1*
225°	$^{5}/_{4}\pi$ *rad*	$-^{\sqrt{2}}/_{2}$
270°	$^{3}/_{2}\pi$ *rad*	*0*
315°	$^{7}/_{4}\pi$ *rad*	$^{\sqrt{2}}/_{2}$
360°	*2π rad*	*1*

El **coseno** en la circunferencia trigonométrica está indicado por las abscisas del punto P.

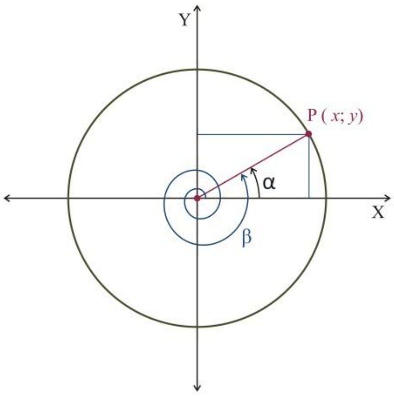
De la observación de estas tablas se puede apreciar que el seno y el coseno, respecto a la amplitud del ángulo orientado α, resultan ser unas funciones limitadas, entre los valores +1 y -1, y periódicas con un periodo igual al ángulo giro 2π.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COTERMINALES COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y OPUESTOS

Ángulos coterminales

En la vida de cada día, nos encontramos con frecuencia a utilizar los ángulos por variadas motivaciones; en la gran mayoría de los casos, la medida de estos varía de cero hasta el ángulo giro. En muchas disciplinas científicas, entre las cuales la trigonometría, pero se hace necesario considerar ángulos cuya medida supera la del ángulo giro. Los *ángulos coterminales* son aquellos ángulos trigonométricos en posición normal que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final, sólo se diferencian por su medida. Si α y β son ángulos coterminales y α es mayor que β, entonces α será igual a β mas un número entero de ángulos giro.

$$\alpha = \beta + n \times 360°$$



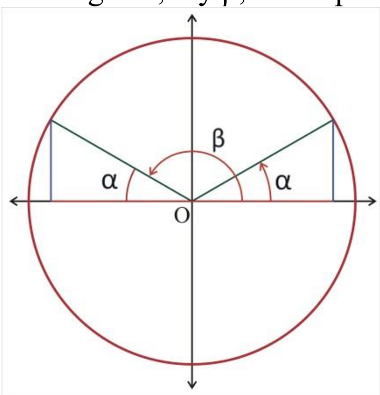
Los ángulos coterminales tienen las mismas razones trigonométricas, siendo el punto P común a todos.

EJEMPLO:

20˚ y 380˚ son ángulos coterminales, siendo 380° = 20° + 360° entonces podemos decir que *sen* 20˚ = *sen* 380˚, *cos* 20˚ = *cos* 380˚

Ángulos suplementarios

Dos ángulos, α y β, son suplementarios si suman 180°.



El ángulo β, mayor de 90° y menor de 180°, determina un punto P_1, intercesión entre la circunferencia trigonométrica y el segundo lado del ángulo, en el segundo cuadrante. El ángulo α, suplementario a β, determina a la vez un punto P, simétrico al punto P_1, respecto al eje vertical; así, por construcción, la ordenada de P y de P_1 son iguales, mientras las abscisas de P y de P_1 son opuestas.

$$sen\ \beta = sen\ \alpha \quad cos\ \beta = -\ cos\alpha$$

De esto podemos “reducir” al primer cuadrante, los ángulos del segundo cuadrante, es decir asociar a un ángulo mayor de 90° y menor de 180° a su complementario teniendo en cuenta que el valor del seno es igual mientras el valor del coseno es opuesto.

150° =180° –30°, entonces 30° es complementario de 150°

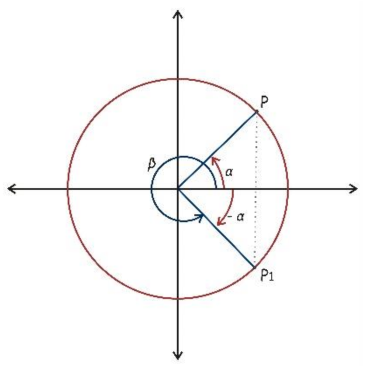
sen 150°= sen 30° *cos 150° = –cos 30°*

Ángulos opuestos

Recuerda que si α es un ángulo, su opuesto se escribe $-\alpha$ y se interpreta como un ángulo de igual tamaño pero en sentido contrario a α, es decir, si α se considera el ángulo formado por una rotación contraria a la de las agujas de un reloj (sentido positivo), entonces $-\alpha$ será el ángulo generado por una rotación congruente a la de las agujas del reloj (sentido negativo).

Observa que la suma de un ángulo y su opuesto es el ángulo 0º, es decir:

$\alpha + (-\alpha) = \alpha - \alpha = 0^o$



El ángulo α determina por la intersección con la circunferencia trigonométrica el punto P, mientras el ángulo $-\alpha$ determina el punto P_1, simétrico a P respecto al eje horizontal. Las abscisas de P y P_1 son iguales, mientras las ordenadas son opuestas.

De esto podemos deducir que el seno de ángulos opuestos es igual, mientras el coseno de ángulos opuestos es opuesto.

$$sen\ \alpha = sen(-\alpha) \qquad cos\ \alpha = -cos(-\alpha)$$

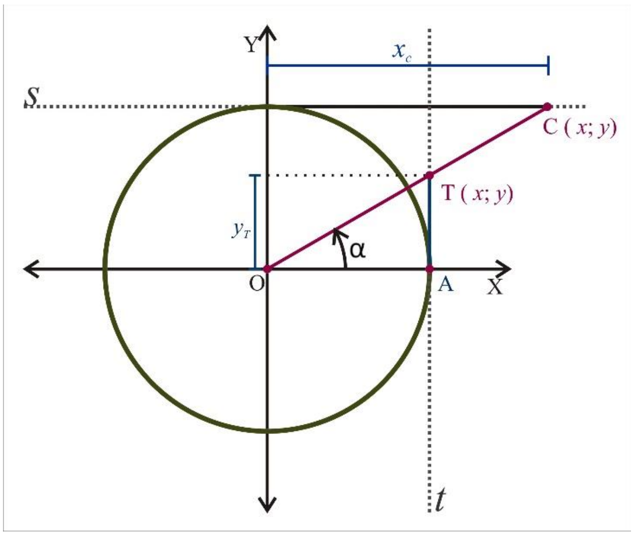
Además podemos deducir que dado un ángulo β, tale que $\beta = 360° - \alpha$, entonces el seno de β es igual al seno de α y el coseno de β es opuesto al coseno de α.

$$sen\ \beta = sen\ \alpha \qquad cos\ \beta = -cos\ \alpha$$

DEFINICIÓN DE TANGENTE Y COTANGENTE

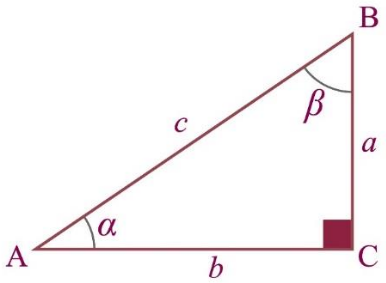
Tangente

Dada una circunferencia trigonométrica, se define la tangente de esta manera:



La tangente de un ángulo orientado α, en posición normal, es la ordenada del punto T, intersección entre el segundo lado de α $\overline{OT}$ y la recta tangente a la circunferencia trigonométrica perpendicular al eje de las abscisas.

En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de sus ángulos agudos corresponde a la razón que se establece entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al mismo.



Considerando la nomenclatura normal podemos deducir:

$$tg\ \alpha\ = \frac{a}{b}$$

Cotangente

En la circunferencia trigonométrica se define la cotangente de esta manera:

> *La cotangente de un ángulo orientado α, en posición normal, es la abscisa del punto T, intersección entre el segundo lado de α $\overline{OT}$ y la recta tangente a la circunferencia trigonométrica perpendicular al eje de las ordenadas.*

La cotangente es la razón inversa de la tangente. Es decir que en un triángulo rectángulo, definimos la cotangente de uno de sus ángulos agudos como la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.

Considerando la nomenclatura normal podemos deducir:

$$ctg\ \alpha\ = \frac{b}{a}$$

A diferencia del seno y del coseno, que son limitados entre los valores 1 y -1, el valor de la tangente, como el de la cotangente, pueden tomar cualquier valor real, de +∞ hasta−∞.

También debemos resaltar que mientras resulta posible determinar el valor del seno y del coseno por todo ángulo, esto no es posible por la tangente y por la cotangente, siendo que en algunos casos estas razones no existen:

● por todos los ángulos de tipo 90°+ *n* x180° resulta que el segundo lado del ángulo es paralelo a la recta t, así no existe un punto de intersección entre las dos y por consecuencia no existe la tangente del ángulo;

● por todos los ángulos de tipo *90°+ n x180°* resulta que el segundo lado del ángulo es paralelo a la recta t, así no existe un punto de intersección entre las dos y por consecuencia no existe la tangente del ángulo;

● por todos los ángulos de tipo *n x180°* resulta que el segundo lado del ángulo es paralelo a la recta s, así no existe un punto de intersección entre las dos y por consecuencia no existe la cotangente del ángulo.

El aprendiz topógrafo

El topógrafo en su labor se encuentra muchas veces a levantar planos de terrenos, construcciones, monumentos, para diferentes usos. Muchas veces debe calcular medidas horizontales y verticales que no pueden ser tomadas directamente, así debe poner en práctica sus saberes y su habilidad para poder determinar de forma indirecta las medidas que necesita.

En la mayoría de los casos resuelve el problema aplicando las nociones de trigonometría, reduciendo sus problemas a triángulos y aplicando las razones trigonométricas.

MIDIENDO ALTURAS CON EL CLINÓMETRO

El clinómetro, además de ayudar en la medición de la inclinación de un terreno, carretera, canal etc., o del trazo de una determinada inclinación, resulta ser útil también en la medición de alturas de objetos que no se pueden medir de manera directa.

Los topógrafos utilizan instrumentos más precisos como el teodolito para sus mediciones, pero el principio sobre el cual se basan estos instrumentos es el mismo de nuestro clinómetro.

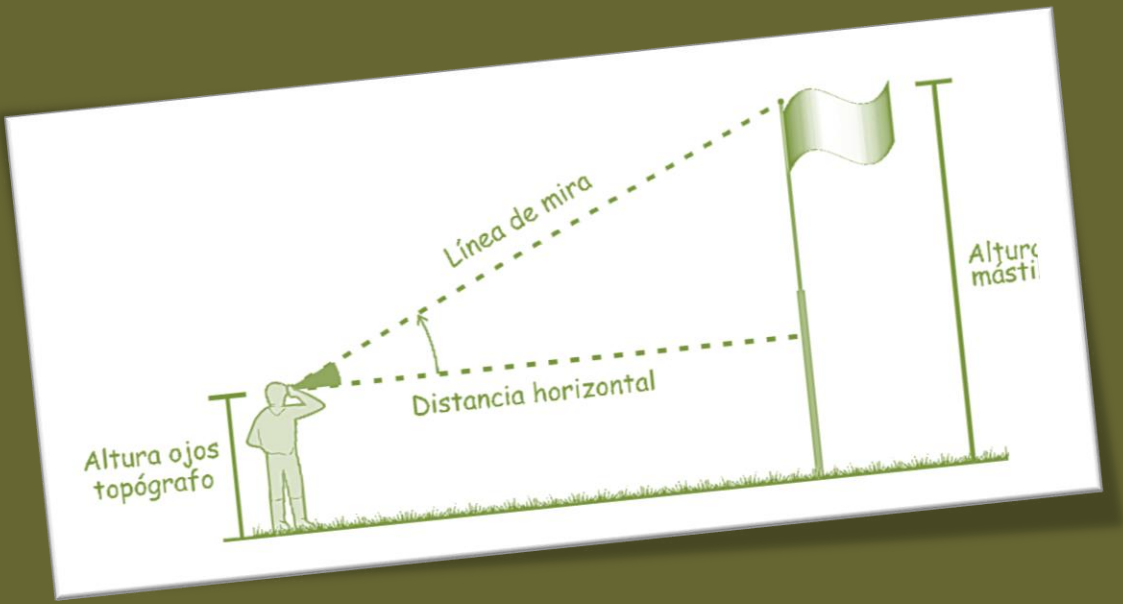
Con este rudimental instrumento podemos medir la altura del mástil de nuestra institución, de la torre campanaria de nuestro pueblo, etc.

Para esto debemos poner en práctica nuestros saberes en merito a las razones trigonométricas y en particular a la de la tangente; además debemos emplear toda nuestra habilidad de aprendices topógrafos.

¡Ahora prueba tú!

Con la ayuda del clinómetro medimos la altura del mástil de tu nuestra institución educativa.

Para lograr debemos ubicar un punto fijo a cierta distancia de la base del mástil (por ejemplo 20 m) en un tramo del patio que sea más plano posible. De este punto, que representa nuestra estación, con la mira del clinómetro se fija a la cúspide del mástil midiendo así el ángulo de elevación. Una vez conocido el ángulo, medimos la distancia horizontal entre la base del mástil y el punto fijado para la observación (estación) y podemos proceder al cálculo de la altura.



Para realizar el cálculo dibujamos en nuestro cuaderno de campaña un croquis del triángulo rectángulo que estamos resolviendo, anotando la distancia horizontal, el ángulo, la altura de los ojos del topógrafo observador etc.

Ahora aplicando la definición de tangente, podemos resolver nuestro problema.

Altura del mástil = altura de los ojos del topógrafo + distancia horizontal x tg α

¡Buen trabajo!

EJERCICIOS

1. Sean *sen15º=0,26* y *cos15º=0,97*. Calcula seno, coseno y tangente de 165º.

2. Sean *sen23º=0,39* y *cos23º=0,92*. Halla las razones trigonométricas de 157º.

3. Reduce cada ángulo al primer cuadrante y resuelve:

   a) sen120º b) tg300º

   c) sec225º d) cos 215º

4. Reduce al primer cuadrante los siguientes ángulos y luego calcula sus razones trigonométricas:

	Sen	*Cos*	*tg*	*ctg*
392º				
287º				
632º				
452°				

5. Grafica el ángulo correspondiente al primer cuadrante de estos ángulos trigonométricos.

   a) 105º b) 250º

   c) 475º

6. Ubica los siguientes ángulos en la circunferencia trigonométrica e indica el cuadrante al que pertenece.

   a) 120º b) 225º

   c) (4π/5)rad d) (2π/3)rad

7. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en posición normal si su lado final pasa por P (-3; 2).

8. Siendo P (5; -3) un punto del lado final del ángulo α que está en posición normal. Hallar las razones trigonométricas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Llamamos razones trigonométricas de un ángulo agudo α a las razones entre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre este ángulo, considerando que, todos los triángulos rectángulos que se puedan construir con el ángulo α son semejantes y de consecuencia mantienen constantes las razones entre sus lados.

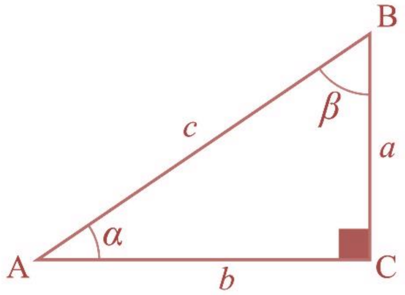
Consideramos a los ángulos de un triángulo rectángulo designados por α, β y γ siendo γ el ángulo recto. Los lados opuestos a los ángulos se representan por a, b y c respectivamente. La suma de los ángulos agudos es de 90º y cada uno es el complemento del otro.

Por lo tanto podemos definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo como el cociente que se establece entre las longitudes los catetos y del hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre él.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ÁNGULOS AGUDOS			
Seno	$sen\alpha = \frac{cat.op.\alpha}{hip.} = \frac{a}{c}$	Tangente	$tg\alpha = \frac{cat.op.\alpha}{cat.ad\ \alpha.} = \frac{a}{b}$
Coseno	$cos\alpha = \frac{cat.ad.\alpha}{hip.} = \frac{b}{c}$	Cotangente	$ctg\alpha = \frac{cat.ad.\alpha}{cat.op.\alpha} = \frac{b}{a}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dato un triángulo rectángulo, aplicando las razones trigonométricas de los ángulos agudos, podemos deducir que el cateto a es al mismo tiempo $c \times sen\ \alpha$ y $c \times cos\ \beta$.



De esto deducimos que, siendo α y β complementarios por construcción, el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{b}\ y\ cos(90° - \alpha) = \frac{a}{b} \rightarrow sen\ \alpha = cos(90° - \alpha)$$

$$tg\ \alpha = \frac{a}{c}\ y\ ctg(90° - \alpha) = \frac{a}{c} \rightarrow tg\ \alpha = ctg(90° - \alpha)$$

$$sec\ \alpha = \frac{b}{c}\ y\ csc(90° - \alpha) = \frac{b}{c} \rightarrow sec\ \alpha = csc(90° - \alpha)$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo se caracteriza por la medida de sus tres lados, y por la amplitud de sus ángulos. Estas medidas están estrictamente relacionadas.

Resolver un triángulo rectángulo es hallar las medidas de sus dos ángulos agudos y las longitudes de sus tres lados, a partir de alguno de sus elementos conocidos.

La razón entre los tres lados de un triángulo rectángulo es establecida por el teorema de Pitágoras. No siempre pero es suficiente la aplicación de este para resolver el triángulo, hay casos en los cuales los datos conocidos no son suficientes para la aplicación de Pitágoras, además este teorema no nos ayuda a descubrir las amplitudes de los ángulos .

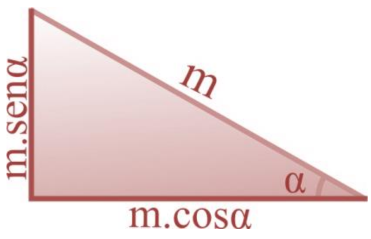
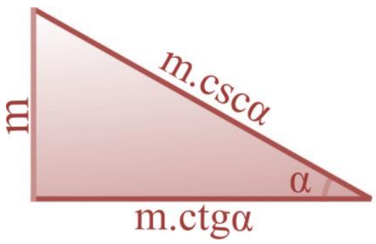
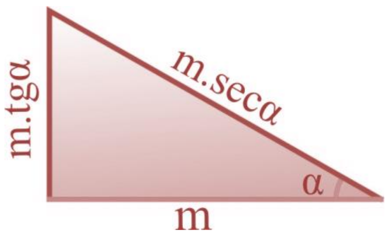
Para resolver cualquier triángulo rectángulo, aplicando las razones trigonométricas, es suficiente conocer dos de sus elementos.

● *Conociendo dos lados:*

Si se conocen dos lados de un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras, se puede calcular el lado desconocido.

La aplicación de la definición del seno nos permite calcular la amplitud de los ángulos agudos α y β.

● *Conociendo un lado y un ángulo agudo:*
Conociendo uno de sus ángulos agudos y uno de sus lados siempre es posible resolver el triángulo rectángulo.

Ángulo e hipotenusa.	Ángulo y lado opuesto.	Ángulo y lado adyacente.
		
El cateto opuesto al ángulo es igual a la hipotenusa por el seno del mismo ángulo. El cateto adyacente al ángulo es igual a la hipotenusa por el coseno del dicho ángulo.	El cateto adyacente al ángulo es igual al cateto opuesto por la cotangente del mismo ángulo. La hipotenusa es igual al cateto opuesto por la cosecante del dicho ángulo.	El cateto opuesto al ángulo es igual al cateto adyacente por la tangente del mismo ángulo. La hipotenusa es igual al cateto adyacente por la secante del dicho ángulo.

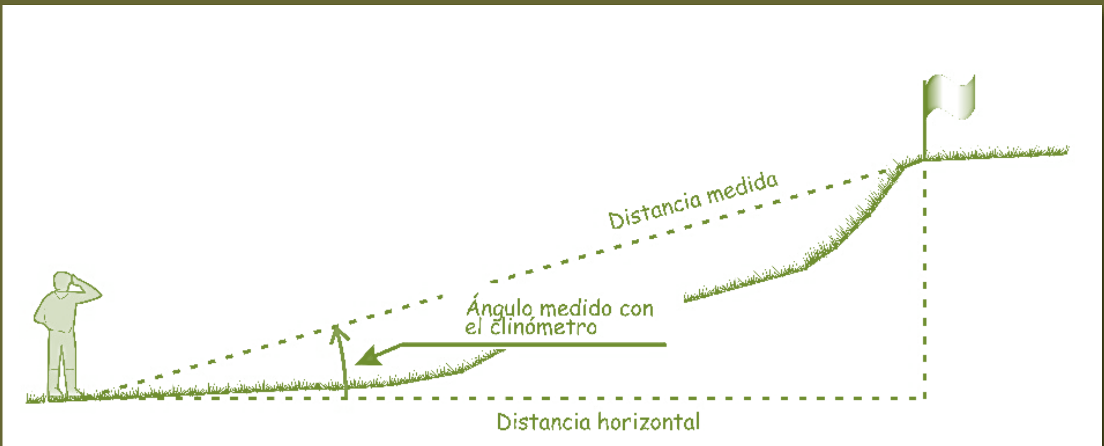
El aprendiz topógrafo

Los topógrafos utilizan las definiciones de seno y coseno para resolver triángulos rectángulos y así calcular distancias y alturas que no se pueden medir de forma directa. Por ejemplo para reproducir en un plano un terreno muy accidentado y con fuertes desniveles se hace necesario aplicar las definiciones de seno y coseno, las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos para estimar las distancia horizontales que es imposible medir directamente.

¡Ahora prueba tú!

Probamos a calcular la distancia horizontal entre dos puntos desnivelados del patio de nuestro colegio:

forma un equipo con otro compañero, procúrate un clinómetro con su asta, una huincha métrica, y tu cuaderno de campaña.



Con el clinómetro medimos la inclinación de la línea imaginaria que une los dos puntos. Para esto repasa la actividad "El aprendiz topógrafo" a página 14 del cuaderno de trabajo.

Ahora con una huincha métrica mide la distancia entre los dos puntos y aplicando las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos calcula la distancia horizontal.

¡Todos a probar!

EJERCICIOS

1. En un triángulo rectángulo, se sabe que un cateto mide el triple del otro. Además, α es el mayor ángulo agudo y β, el menor. Calcula el valor de α y de β

2. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 360 cm. Si la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4, ¿cuánto mide el ángulo menor?

3. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B la hipotenusa mide 10 cm y *sen* γ = 0,5. Calcula la medida del ángulo mayor.

4. Una escalera está apoyada en una pared formando un ángulo de 70° con el suelo, y su base se encuentra a 2,5m de la pared. Halle la longitud de la escalera y la altura que alcanza sobre la pared.

5. Halle la longitud de la sombra proyectada por un poste de 8m de altura cuando el sol se encuentra a 20° sobre el horizonte.

6. Resuelve el triángulo ABC, recto en B, si AB = 14*m* y γ= 28°.

7. Una cometa se queda atascada en la rama más alta de un árbol. Si la cuerda que la sostiene mide 20m y forma un ángulo de 35° con el suelo, calcula la altura del árbol.

8. Un topógrafo observa con un teodolito la cima de un edificio con un ángulo de elevación de 19°. Si el teodolito se encuentra a una altura de 1,40 *m* y a una distancia de 45 *m* del edificio, halla la altura del edificio.

9. Desde un punto B del suelo, se observa el punto más alto C de una torre con un ángulo de 60°. Retrocediendo 15 m, se ve el mismo punto con un ángulo de 30°. Halla la altura de la torre.

10. Desde lo alto de un acantilado de 200 m de altura sobre el nivel del mar; el ángulo de depresión con que se observa un barco es de 15°. ¿A qué distancia se encuentra el barco del pie del acantilado?

11. Una persona observa la parte superior de un edificio de 12m de altura con un ángulo de elevación de 37°. ¿A qué distancia del edificio se realizó la observación sabiendo que la persona mide 1,8 m?

12. Desde la parte superior de una torre se observan en un mismo plano vertical dos puntos en tierra A y B con ángulos de depresión de 45° y 37° respectivamente. Si la altura de la torre es de 18 m, calcular la distancia entre A y B.

13. Rubén mide 1,68 m y mira un árbol con un ángulo de observación de 82°, si la distancia entre estos es de 2,24 m, calcular la altura del árbol.

14. Halla la altura de un faro si se sabe que el ángulo de elevación es de 25° en un punto y de 35° acercándose 60 m a la base del faro.

15. Desde la parte superior de una torre se observan dos piedras alineadas en el suelo, con ángulos de depresión 37° y 53°. Si la altura de la torre es de 36 m, ¿qué distancia separa la base de la torre de las piedras?

16. Una persona sale de su casa y camina 20 m con rumbo 160° este, otra persona sale del mismo punto y camina 21 m con rumbo 70° este. Calcular la distancia entre las personas.

17. Natalia se encuentra a 80 m de su casa en la dirección SE y Vanesa se encuentra a 60 m de su casa en la dirección NE. Hallar la distancia entre Natalia y Vanesa.

18. Un móvil parte de un punto R y recorre 36 m en dirección NE. Luego, cambia de rumbo y recorre 105 m en dirección NO. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida? ¿Cuál es el ángulo de rumbo de su desplazamiento?

19. Dos barcos, A y B, están separados 20 millas. B está situado con respecto de A en dirección S 80° O. Un submarino C se ve desde B en dirección S 40° E y desde A en dirección S 20° O. Halla la distancia del barco A al submarino C.

20. Desde la base de un faro F se observa el barco A con dirección SO y el barco B con dirección S 15° E. al mismo tiempo, el barco B es observado desde el barco A con dirección SE. Si la distancia entre el faro y el barco A es de 6 km, ¿Qué distancia separa a los barcos

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TEOREMA DEL SENO

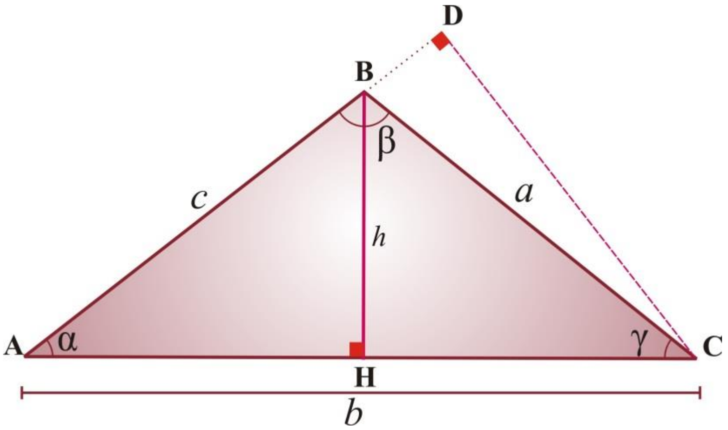
En todo triángulo la razón entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto se mantiene constante

Utilizando la nomenclatura típica de los triángulos podemos afirmar que:

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

Aplicando el teorema del seno, se puede resolver cualquier tipo de triángulo conociendo dos ángulos y un lado o un ángulo y dos lados.

Demostramos ahora el teorema del seno: sea un triángulo ABC cualquiera, con *a*, *b* y *c* sus lados respectivamente opuestos a los vértices A, B y C y a los ángulos α, β y γ.



Si trazamos la altura respecto al lado b se obtiene el segmento BH. Esto divide el triángulo en dos triángulos rectángulos, rectos en H con un cateto común.

Aplicando la definición de seno en el triángulo AHB obtenemos:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\mathrm{c}} \text{ entonces } \overline{\mathrm{BH}} = sen\ \alpha \times c \text{ (1)}$$

De la misma manera del triángulo BHC obtenemos:

$$sen\ \gamma = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\mathrm{a}} \text{ entonces } \overline{\mathrm{BH}} = sen\ \gamma \times a \text{ (2)}$$

Siendo BH el cateto común, de las formulas 1 y 2 se puede deducir que:

$$sen\ \alpha \times c = sen\ \alpha \times c \text{ (3)}$$

Entonces:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \gamma} \text{ (4)}$$

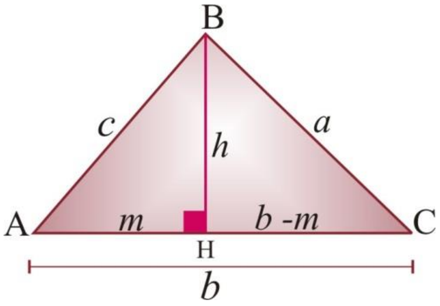
Esto se puede repetir por cada altura del triángulo y queda así demostrado el teorema del seno.

TEOREMA DEL COSENO O TEOREMA DE CARNOT

El teorema del coseno se puede considerar como la extensión del teorema de Pitágoras a los triángulos oblicuángulos.

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos su doble producto por el coseno del ángulo que estos forman.

Demostramos ahora el teorema del coseno: sea un triángulo ABC cualquiera, con *a*, *b* y *c* sus lados respectivamente opuestos a los vértices A, B y C.



Trazamos la altura respecto al lado *b*, obteniendo así dos triángulos rectángulos, AHB, CHB, con un cateto en común. El lado b resulta dividido en dos segmentos, uno de estos lo llamamos *m*, el otro será $b - m$. Por la definición de coseno se sabe que:

$$m = c \cdot cos\alpha$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHB se puede afirmar que:

$$\overline{\mathrm{BH}}^2 = \mathrm{c}^2 - \mathrm{m}^2 \ (1)$$

Ahora aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHB se puede deducir que:

$$\overline{BH}^2 = a^2 - (b - m)^2$$
$$\overline{BH}^2 = a^2 - \ (b^2 - 2bm + m^2)$$
$$\overline{BH}^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2 \ (2)$$

Igualando el segundo miembro de la 2 con el segundo miembro de la 1 se obtiene:

$$a^2 - b^2 + 2bm - m^2 = c^2 - m^2$$

Restando de ambos miembros m^2 y despejando a^2 al primer miembro se obtiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Por la definición de coseno se sabe que:

$$m = c \cdot cos\alpha$$

Así que se obtiene la fórmula del teorema de Carnot:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ \cdot cos\alpha$$

El teorema del coseno nos permite resolver todo tipo de triángulo conociendo dos de sus lados y el ángulo que estos forman.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Con el teorema del seno y el del coseno se puede resolver cualquier tipo de triángulo conociendo tres de sus elementos:

● *Conociendo dos ángulos y un lado*

Si se conocen dos ángulos se puede deducir el tercero sabiendo que en todo triángulo los ángulos internos suman 180°. Aplicando luego el teorema del seno se calculan las longitudes de los lados desconocidos.

● *Conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos*
Si se conocen dos lados y el ángulo que estos forman, se puede calcular el lado desconocido aplicando el teorema del coseno. Una vez que se conoce el tercer lado se puede aplicar el teorema del seno para determinar la amplitud de los dos ángulos desconocidos.

● *Conociendo tres lados*
Si se conocen los tres lados del triángulo se puede calcular la amplitud de uno de sus ángulos con la formula inversa del teorema del coseno:

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Una vez determinada la amplitud del ángulo α se pueden calcular las amplitudes de β y de γ con el teorema del seno.

Conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
Si se conocen un ángulo y el lado opuesto se puede establecer la razón del triángulo por el teorema del seno, si se conoce el segundo lado se puede determinar así la amplitud del ángulo opuesto. De estos se deduce el tercer ángulo y luego con el teorema del seno se determina el lado desconocido.

EJERCICIOS:

1. En un triángulo ABC, las medidas de los lados son a=14m, b=9m y c=12m. Calcula la medida del ángulo α.

2. En un triángulo ABC los ángulos β y γ miden respectivamente 105°y 60°. Si el lado BC mide 4m hallen AC.

3. En un triángulo ABC, BC = 20 cm, α = 45º y β = 60º. Calcule AC.

4. Resolver el triángulo ABC si: *a*=10m; b=20m y α= 30º.

5. Resolver el triángulo ABC si: a = $\sqrt{3}\, m$; b = $\sqrt{2}\, m$ y A = 60º.

6. En dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, *B*. Si consideramos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, el ángulo en *A* es de 65º y el ángulo en *C* es de 80º, ¿a qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

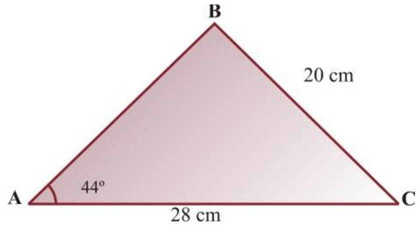
7. Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110º. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km. En ese mismo instante, ¿cuál es la distancia que separa los dos barcos?

8. Se desea unir tres puntos, *A*, *B y C*, mediante caminos rectos que unan *A* con *B*, *B* con *C* y *C* con *A*. La distancia *AB* es de 100 metros, el ángulo correspondiente a *B* es de 50º, y el ángulo en *A* es de 75º. ¿Cuál es la distancia *BC?* ¿Y la distancia *AC*?

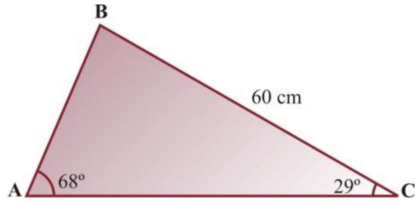
9. Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspondiente al vértice en el que está Sara es de 25ºy el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140º. ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

10. Resuelve los siguientes triángulos aplicando la ley del seno.

a)

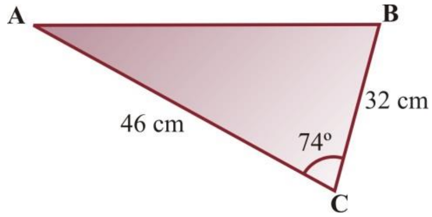


b)

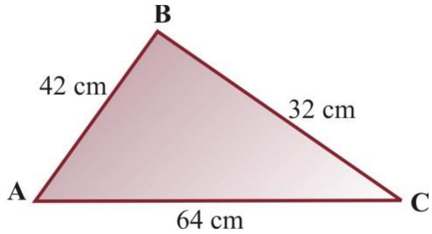


11. Resuelve los siguientes triángulos aplicando la ley del coseno.

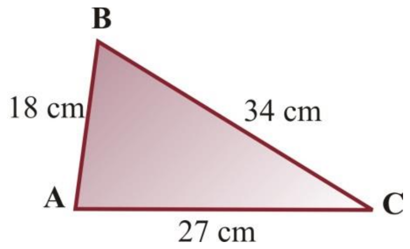
a)



b)



c)



Bibliografía

(2008). Matemáticas. En J. L. Alfonso Borrego, M. Á. Cabezón Ochoa, J. I. Fernandez Rubio, & M. J. García Cebrián, *Trigonometría B* (págs. 115-129). Madrid: Descartes.

Fernanda Mora , María; Xinema Nieto, Eliana; Lucia Polanía, Diana; Lilia Romero, Marta; José Gonzalez, María. (2012). *Razones Trigonométricas vistas a través de múltiples lentes.* Bogotá: Univercidad de los andes.

Fernández Medina, J. (2010). *Unidad Didáctica: Trigonometría.* Granada: Univercidad de Granada.

Flore Gil, F. L. (2008). *Historia y Didáctica de la trigonometría.* Jaén: Íttakus.

González de Herrera Carrillo, Antonio; Moreno Parodi, Beatriz; Nuñez de la Torre, Pablo;. (2009). Aprendizaje y Enseñanza de las Materias de Matemáticas. *Kodorniz*, 40.

Laurenco, J. M. (s.f.). *50 Juegos de orientación y topografía.*

Mejía Tamayo, C. (2011). *Matemática 3.* Lima: Santillana S.A.

Mejía Tamayo, C. (2011). *Matemática 4.* Lima: Santillana S.A.

Mejía Tamayo, C. (2013). *Matemática 5.* Lima: Santillana S.A.

Ramón Bagur, A. (2010). *Matemáticas para todos.*

Ros, R. (s.f.). *Maletín del joven astrónomo.* Barcelona: NASE.

Turano , C. (s.f.). *Historia de la Trigonometría.* Buenos Aires: UNSAM.

Anexo 2

PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD

TÍTULO DE LA UNIDAD:
“El aprendiz topógrafo”

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

II. SITUACIÓN SIGNIFICATIVA
Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría en la vida del hombre es la topografía que permite la medición de terrenos, el trazo de confines en estos, el monitoreo de movimientos, la realización de construcciones públicas y privadas y permite la representación gráfica del territorio, su relieve, la ubicación en este de elementos significativos etc. Efectivamente la medición y representación de terrenos, necesaria para una infinidad de aplicaciones en la vida del hombre, presenta un problema que sobresale desde un primer acercamiento al tema. No existe un terreno que tenga forma de un polígono conocido. En la realidad aparece evidente que los terrenos presentan formas irregulares, uno diferente de otro y con una gran variabilidad. Para poder medir estos terrenos es necesario descomponerlos en triángulos y resolver cada uno de ellos; llegando de esta manera a la resolución práctica de un polígono cualquiera. Por lo tanto, la resolución de problemas que derivan de la práctica de actividades topográficas, implica el manejo de estrategias, el reconocimiento de propiedades y la puesta en relación de diferentes conceptos y esto es sin duda un factor que impulsa el aprendizaje significativo de la trigonometría.

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIAS	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	• Clasifica los diferentes triángulos • Clasifica ángulos según su posición • Describe los criterios de congruencia de triángulos • Identifica los lados de un triángulo rectángulo • Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo • Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos

		• Formula estrategias de solución de problemas de ángulos entre rectas paralelas • Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares • Define una circunferencia trigonométrica • Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica • Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo • Identifica los ángulos coterminales • Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno • Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo
	Comunica y representa ideas matemáticas	• Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos • Representa gráficamente los elementos de un triángulo • Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes • Representa gráficamente los diferentes triángulos • Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo • Establece relaciones entre ángulos formados por rectas paralelas y una secante • Representa medidas angulares en diferentes sistemas • Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares • Determina las medidas de ángulos orientados • Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno • Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas • Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas • Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica • Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas

		y ejercicios
	Elabora y usa estrategias	• Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos • Determina el complemento y suplemento de un ángulo • Efectúa conversiones de medidas angulares • Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal • Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas • Resuelve problemas que implican el reconocimiento de sistemas de coordenadas polares • Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados • Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno • Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente • Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del coseno • Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos • Calcula los lados y ángulos de triángulo oblicuángulo • Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos • Resuelve problemas de triángulos rectángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	• Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos • Resuelve problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales • Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras • Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras • Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados • Resuelve problemas utilizando los tres sistemas de medición angular • Interpreta gráficamente las razones

		trigonométricas • Discrimina entre el concepto del seno y del coseno • Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados • Relaciona los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentra el lado final de ángulo en posición normal • Discrimina entre ángulo de elevación y ángulo de depresión • Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos • Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del seno • Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo • Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley de senos • Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas • Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo

IV. CAMPO TEMÁTICO:	
• TRIÁNGULOS	- Triángulos rectángulos - Semejanza de triángulos - Triángulos congruentes - Teorema de Pitágoras y de Thales
• ÁNGULOS	- Clasificación de los ángulos según su amplitud y posición - Sistema de medidas angulares - Ángulos orientados
• RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	- Circunferencia trigonométrica - El seno y coseno - Tangente y cotangente - Reducción de ángulos al primer cuadrante - Razones trigonométricas de ángulos
• RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS	- Resolución de triángulos rectángulos - Teorema del seno

- Teorema del coseno - Resolución de triángulos genéricos

V. PRODUCTO MÁS IMPORTANTE
Levantamiento de un plano topográfico

VI. SECUENCIA DE LAS SESIONES	
Sesión 1	Horas pedagógicas: 2h
Título: "La importancia de la trigonometría en el mundo antiguo"	
Indicador: - Reconoce la importancia de la trigonometría en el contexto de las primeras civilizaciones. - Clasifica los diferentes triángulos. - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo. - Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos. - Identifica los lados de un triángulo rectángulo. - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo. - Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes. - Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo. - Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos - Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos. - Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras. - Resuelve problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales. **Campo temático:** - Los triángulos, Teorema de Pitágoras, Triángulos semejantes y Teorema de Tales. **Actividades:** - Se presenta a los estudiantes el nombre de la unidad y el campo temático. - Se cuenta la historia de la trigonometría y la importancia en el entorno de la vida diaria. - El docente hace un repaso general sobre los triángulos.	
Sesión 2	Horas pedagógicas: 2h
Título: "La medición de alturas con el espejo"	
Indicadores: - Describe los criterios de congruencia de triángulos. - Clasifica ángulos según su posición. - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo. - Representa gráficamente los elementos de un triángulo. - Representa gráficamente los diferentes triángulos. - Interpreta del grafico mostrado las semejanzas entre los triángulos - Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras. - Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados. **Campo temático:** - Triángulos congruentes **Actividades:** - El docente explica sobre los triángulos semejantes.	

- Propone a los estudiantes una actividad en el campo, “Medir la altura de los objetos con el espejo” - El docente da las instrucciones necesarias para realizar la actividad. - Los alumnos forman equipos de trabajo, en grupos de 4 estudiantes y salen al patio a medir la altura de la infraestructura, del arco, del asta y del baloncesto. - El grupo anota todos los datos en el cuaderno, para hacer los cálculos correspondientes. - Cada grupo expone los resultados obtenidos.

Sesión 3	Horas pedagógicas: 2h
Título: “Los ángulos”	
Indicadores: - Clasifica ángulos según su posición. - Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares. - Determina el complemento y suplemento de un ángulo. **Campo temático:** - ángulo, sistema de medición de ángulos, clasificación de los ángulos por su amplitud, ángulos según su posición y ángulos según su amplitud. **Actividades:** - El docente presenta una situación en que pide reconocer las propiedades de los ángulos. - Se hace las siguientes preguntas: ¿qué es el ángulo? ¿Cuáles son los elementos de un ángulo? - Los estudiantes mencionan la definición del ángulo. - El docente sintetiza las ideas de los estudiantes en la pizarra despejando todas las dudas. - Se explica de manera precisa el contenido del tema.	
Sesión 4	Horas pedagógicas: 2h
Título: “Midiendo la inclinación de la carretera”	
Indicadores: - Formula estrategias de solución de problemas de ángulos entre rectas paralelas. - Establece relaciones entre ángulos formados por rectas paralelas y una secante. **Campo temático:** - Ángulos formados por un haz de rectas y actividad **Actividades** - E docente explica sobre los ángulos formados por un haz de rectas y luego propone realizar una actividad fuera del salón. - Antes realizar la actividad el docente revisa todo los instrumentos necesarios para la actividad y da las indicaciones necesarias. - La actividad consiste en medir la inclinación de las calles. - Cada grupo deberá anotar todos los datos en el cuaderno de trabajo. - Cada grupo expone el resultado obtenido y comparte con los demás grupos.	
Sesión 5	Horas pedagógicas: 2h
Título: “Midiendo los ángulos”	
Indicadores: - Establece relaciones entre los sistemas de medidas angulares.	

- Representa medidas angulares en diferentes sistemas. - Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares. - Efectúa conversiones de medidas angulares. - Resuelve problemas utilizando los tres sistemas de medición angular. **Campo temático:** - Relación de conversión de los tres sistemas, sistema sexagesimal, centesimal y radial **Actividades:** - El docente junto con los estudiantes comenta sobre la importancia de saber utilizar una brújula. - El docente propone la actividad "Calcular los ángulos de las diferentes estaciones respecto a un punto fijo y transformarlas en los tres sistemas de medición angular". Para ello se explica la relación de conversión de los tres sistemas de medición angular. - Al final de la actividad cada grupo deberá comprobar sus resultados con los demás grupos.	
Sesión 6	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Aprendo a orientarme"	
Indicadores: - Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo. - Determina las medidas de ángulos orientados. - Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados. **Campo temático:** - Ángulos orientados **Actividades:** - Antes de empezar con la clase, el docente forma grupos de cuatro estudiantes, y propone jugar un juego "Itinerario de ángulos". - A partir de este juego se hace las siguientes preguntas: ¿qué son los ángulos orientados?¿Por qué algunos ángulos son negativos? ¿Es importante el signo de los ángulos en determinadas situaciones? - El docente explica de manera detallada sobre los ángulos orientados	
Sesión 7	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Realizando los trazos"	
Indicadores: - Resuelve problemas que implican el reconocimiento de sistemas de coordenadas polares. - Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados. **Campo temático:** - Sistema de coordenadas polares. **Actividades:** - El docente junto con los estudiantes comenta la importancia de las coordenadas polares en el mundo topográfico. - Se explica el contenido del tema. - El docente propone la actividad "Realizando los trazos". - El docente da las indicaciones necesarias para realizar la actividad y revisa los instrumentos necesarios para trabajar. - Los alumnos se agrupan en grupos de 4 estudiantes y salen al campo a realizar la actividad. - Cada grupo deberá trabajar guiándose del texto de trabajo que cada uno tiene y de la ayuda del	

profesor.

Sesión 8	Horas pedagógicas: 2h
Título: "El seno y el coseno"	
Indicadores: - Define una circunferencia trigonométrica. - Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica. - Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal. - Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno. - Discrimina entre el concepto de seno y de coseno. **Campo temático:** - Seno y coseno - Circunferencia trigonométrica - Razones trigonométrica de un ángulo en posición normal **Actividades:** - El docente forma grupos adentro del salón y les presenta una actividad. - A partir de la actividad realizada, el docente repasa la idea de ángulos orientados, contenido previo para los propósitos de la clase. - El docente pregunta ¿qué es el seno? ¿Qué es la circunferencia trigonométrica? - Cada estudiante reflexiona y comparte su respuesta con el compañero de carpeta. - El docente da las definiciones correspondientes de seno y coseno.	
Sesión 9	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Razones trigonométricas"	
Indicadores: - Identifica los ángulos coterminales. - Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente. - Relaciona los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentra el lado final de ángulo en posición normal. **Campo temático:** - Signos de las razones trigonométricas, líneas trigonométricas de seno y coseno, razones trigonométricas de ángulos coterminales, complementarios, suplementarios y opuestos, y definición de tangente y cotangente.	

Actividades: - El docente presenta una lámina sobre las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica y pide a los estudiantes de reconocer el seno y el coseno. - A partir de esta situación el docente explica los contenidos que abarca la sesión

Sesión 10	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Midiendo alturas con el clinómetro"	
Indicadores: - Resuelve problemas que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos, complementarios y suplementarios. - Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas - Interpreta gráficamente las razones trigonométricas. - Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas. **Campo temático:** - Razones trigonométricas de ángulos agudos, razones trigonométricas de ángulos complementarios y actividad **Actividades:** - Se comenta junto con los estudiantes el problema de medir alturas inaccesibles con el utilizo de una cinta métrica. - El docente propone una situación problemática:"cómo medir la altura de diferentes objetos como, el poste de un alumbrado público, torres, el asta, antenas y otros objetos que no nos permiten hacer una medición directa". - Los estudiantes dialogan en grupo y dan sus opiniones. - El docente propone una actividad "Medir alturas inaccesibles con el clinómetro" - Antes de empezar con la actividad el docente da las instrucciones necesarias para poder trabajar con facilidad y precisión. - Durante la actividad el proceso más importante es anotar todos los datos en el cuaderno de trabajo. - Al final de la actividad los grupos comparan sus resultados y exponen el salón.	
Sesión 11	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Resolución de triángulos rectángulos"	
Indicadores: - Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica.	

- Resuelve problemas de triángulos rectángulos
- Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.

Campo temático:

- Resolución de triángulos rectángulos

Actividades:

- El docente presenta una lámina acerca de los triángulos rectángulos y hace las siguientes preguntas: ¿en qué consiste resolver un triángulo rectángulo?, ¿Qué es un triángulo rectángulo?, ¿Qué característica tiene un triángulo rectángulo?
- Los estudiantes escriben sus respuestas en el cuaderno y comparten con sus compañeros.
- Luego el docente explica los contenidos temáticos y los estudiantes deberán corregir las repuestas escritas inicialmente.

Sesión 12	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Midiendo una distancia horizontal"	

Indicadores:

- Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo.
- Discrimina entre ángulo de elevación y ángulo de depresión.

Campo temático:

-Medida de distancias horizontales

Actividades:

- Se comenta junto con los estudiantes el trabajo de los topógrafos y la utilidad que le dan a las definiciones del seno y coseno para calcular distancias y alturas que no se pueden medir de forma directa.
- Para comprender mejor el tema el docente propone una actividad. "Medir la distancia entre los puntos desnivelados y la distancia entre puntos inaccesibles".

Sesión 13	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Resolución de triángulos oblicuángulos "	

Indicadores:

- Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno.
- Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas y ejercicios.
- Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas.
- Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas.
- Plantea y resuelve problemas aplicando la ley cosenos.
- Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos.
- Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos.
- Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo.

Campo temático: - Resolución de triángulos oblicuángulos, teorema del seno y teorema de l coseno o de Carnot **Actividades:** - Se organizan los estudiantes formando grupos de cuatro integrantes y el docente entrega a cada grupo una fotocopia, en la cual se muestra un plano de una pequeña ciudad donde hay edificios, un banco, una iglesia, una escuela y un parque. - El docente plantea el siguiente problema: *¿cómo puedo calcular el perímetro del banco?*, ¿Qué figura geométrica representa el parque?, ¿Cuáles elementos debemos conocer para calcular el perímetro?, ¿Los tenemos todos?, ¿Cómo calculamos el lado que no conocemos? - Cada grupo tiene aproximadamente 10 minutos para elaborar una estrategia que permita determinar lo que pide el problema, a partir de los datos conocidos. - El docente sintetiza los resultados y explica el campo tema.

Sesión 14	Horas pedagógicas: 2h
Título: "Levantamiento de un plano"	
Indicadores: - Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno. - Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos. - Calcula los lados y ángulos de triángulo oblicuángulo. - Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos. - Plantea y resuelve problemas aplicando la ley de senos - Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley de senos. **Campo temático**: Producto final **Actividades:** - El docente formar equipos de trabajo de 3 o 4 integrantes. - La actividad que se realiza es la de elaborar un plano del patio de la institución educativa. - Con la compañía del docente, salen al lugar de trabajo, el patio. - En el patio el docente da las indicaciones para que cada grupo pueda realizar las mediciones correctas. - Con las medidas obtenidas cada equipo de trabajo presenta en un paleógrafo el plano del patio de la institución.	

VII. EVALUACIÓN

<table>
<tr><th>SITUACIÓN DE EVALUACIÓN</th><th>COMPETENCIAS</th><th>CAPACIDADES</th><th>INDICADORES</th></tr>
<tr><td rowspan="2">DESARROLLA CONCEPTOS TRIGONOMÉTRICOS Y ACTIVIDADES TOPOGRÁFICAS; PARA PODER DESARROLLAR EL LEVANTAMIENTO DE UN PLANO TOPOGRÁFICO</td><td rowspan="2">ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS</td><td>Matematiza situaciones</td><td>• Clasifica los diferentes triángulos
• Clasifica ángulos según su posición
• Identifica los lados de un triángulo rectángulo
• Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo
• Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos
• Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares
• Define una circunferencia trigonométrica
• Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica
• Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo
• Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno
• Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td>Comunica y representa ideas matemáticas</td><td>• Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos
• Representa gráficamente los elementos de un triángulo
• Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes
• Representa gráficamente los diferentes triángulos
• Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo
• Representa medidas angulares en diferentes sistemas
• Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares
• Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno</td></tr>
</table>

			• Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas • Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas • Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica • Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas y ejercicios
		Elabora y usa estrategias	• Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos • Determina el complemento y suplemento de un ángulo • Efectúa conversiones de medidas angulares • Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal • Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas • Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno • Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente • Plantea y resuelve problemas aplicando la ley del coseno • Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos • Calcula los lados y ángulos de triángulo oblicuángulo • Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos • Resuelve problemas de triángulos rectángulos
		Razona y argumenta generando ideas matemáticas	• Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos • Resuelve problemas que demandan

			la aplicación del teorema de Thales • Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras • Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágora • Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados • Resuelve problemas utilizando los tres sistemas de medición angular • Interpreta gráficamente las razones trigonométricas • Discrimina entre el concepto de seno y de coseno • Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos • Plantea y resuelve problemas aplicando la ley de seno • Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo • Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley del seno • Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas • Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo

ANEXO 3

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
“Explorando los saberes previos”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	Describe los criterios de congruencia y la semejanza de triángulos. Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares. Identifica las razones trigonométricas de un ángulo en la circunferencia trigonométrica.
	Comunica y representa ideas matemáticas	Aplica el teorema de Pitágoras y teorema de tales en la resolución de ejercicios.
	Elabora y usa estrategias	Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos que involucran las leyes de seno, y coseno.

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (10 min.)

- ❖ El docente saluda a los estudiantes y da las indicaciones necesarias para el examen.

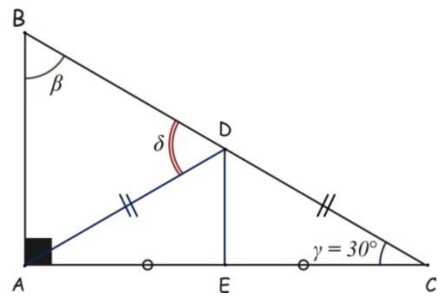
Desarrollo (65min.)

- ❖ El docente entrega a los estudiantes el examen e indica la hora de empiezo y la hora de entrega.

Examen de pre-test "El aprendiz topógrafo"

EXPLORAMOS NUESTROS SABERES PREVIOS

Observa con mucha atención la figura presentada y completa los cuadros propuestos utilizando las propiedades de los triángulos.



Triángulo	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
▲A C						
▲ADE						
▲ADC						
▲ D						

Marca con una ✗ las características que corresponden a cada triángulo

ESTABLECE LAS RELACIONES ENTRE LAS SIGUIENTES PAREJAS DE TRIÁNGULOS			
TRIÁNGULOS	DIFERENTES	SEMEJANTES	CONGRUENTES
▲ABC ;▲ABD			
▲ABC ;▲EDC			
▲ADE ;▲CDE			
▲ADC ;▲ABD			

Marca con una ✗ la relación que existe entre cada pareja de triángulos

APLICANDO OPORTUNAMENTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS O EL DE THALESCOMPLETA EL CUADRO			
TRIÁNGULOS	DATO 1	DATO 2	DATOS A BUSCAR
▲ABC	BC= 12 cm	AB=cm	AC ?

▲**EDC**	ED= 3 cm		DC=?

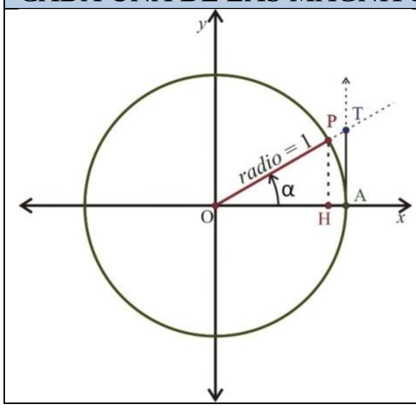
Escribe la formula general y luego calcula el dato que te pide el cuadro

COMPLETA LA TABLA APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS Y LAS FORMULAS DE CONVERSIONES		
Sexagesimal	Radial	Centesimal
γ=*30°*	γ=	γ=
β=	β=	β=
δ=	δ=	δ=

EXPLORAMOS NUESTROS SABERES TRIGONOMÉTRICOS

Observa la imagen y completa el cuadro:

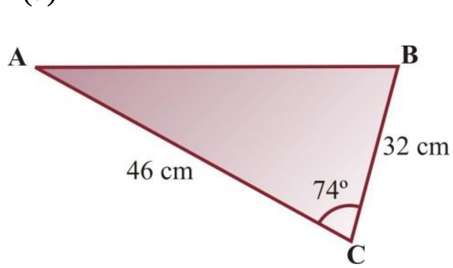
OBSERVA LA FIGURA Y MARCA CON UNA ✗ EL SEGMENTO QUE CORRESPONDE A CADA UNA DE LAS MAGNITUDES TRIGONOMÉTICAS



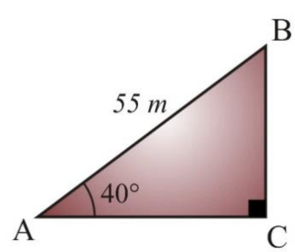
	PH	TA	OH	OA
sen α				
cos α				
tg α				
cotg α				

Aplicando las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, las leyes del seno y del coseno, calcula la longitud de todos los lados y la amplitud de todos los ángulos de los siguientes triángulos.

(a)



(b)



Cierre (15 min.)

- ❖ Se resuelven junto con los estudiantes los ejercicios del examen.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Fotocopias
- Hojas blancas para desarrollar el examen.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"La trigonometría y los triángulos"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Reconoce la importancia de la trigonometría en el contexto de las primeras civilizaciones - Clasifica los diferentes triángulos - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo - Reconoce los elementos de los triángulos rectángulos - Identifica los lados de un triángulo rectángulo - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Aplica semejanza de triángulos para el cálculo de longitudes - Representa simbólicamente la nomenclatura de un triángulo
	Elabora y usa estrategias	- Aplica la propiedad de suma de ángulos internos de los triángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Resuelve problemas que demandan el uso de los criterios de semejanza de triángulos - Elabora estrategias para la resolución de problemas que involucran el teorema de Pitágoras - Resuelve problemas que demandan la aplicación del teorema de Thales

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (25min.)

- El docente saluda a los estudiantes.
- Se presenta la unidad y se resaltan algunas normas de convivencia.

  - Se respetan los acuerdos y las normas de convivencia del equipo.
  - Se identifican los campos temáticos que se abordarán en la unidad para lograr el propósito de la unidad (razones trigonométricas)
  - El docente resalta las actividades destinadas a la elaboración durante el desarrollo de la unidad:

    -determinar la altura de construcciones, las torres de la iglesia, del asta, de los postes de alumbrado público, etc.

    -diseñar trazos del patio de la institución educativa.

    -determinar la inclinación del campo deportivo o de los puntos de mayor inclinación dentro de la institución educativa.

    -diseñar un mapa topográfico.

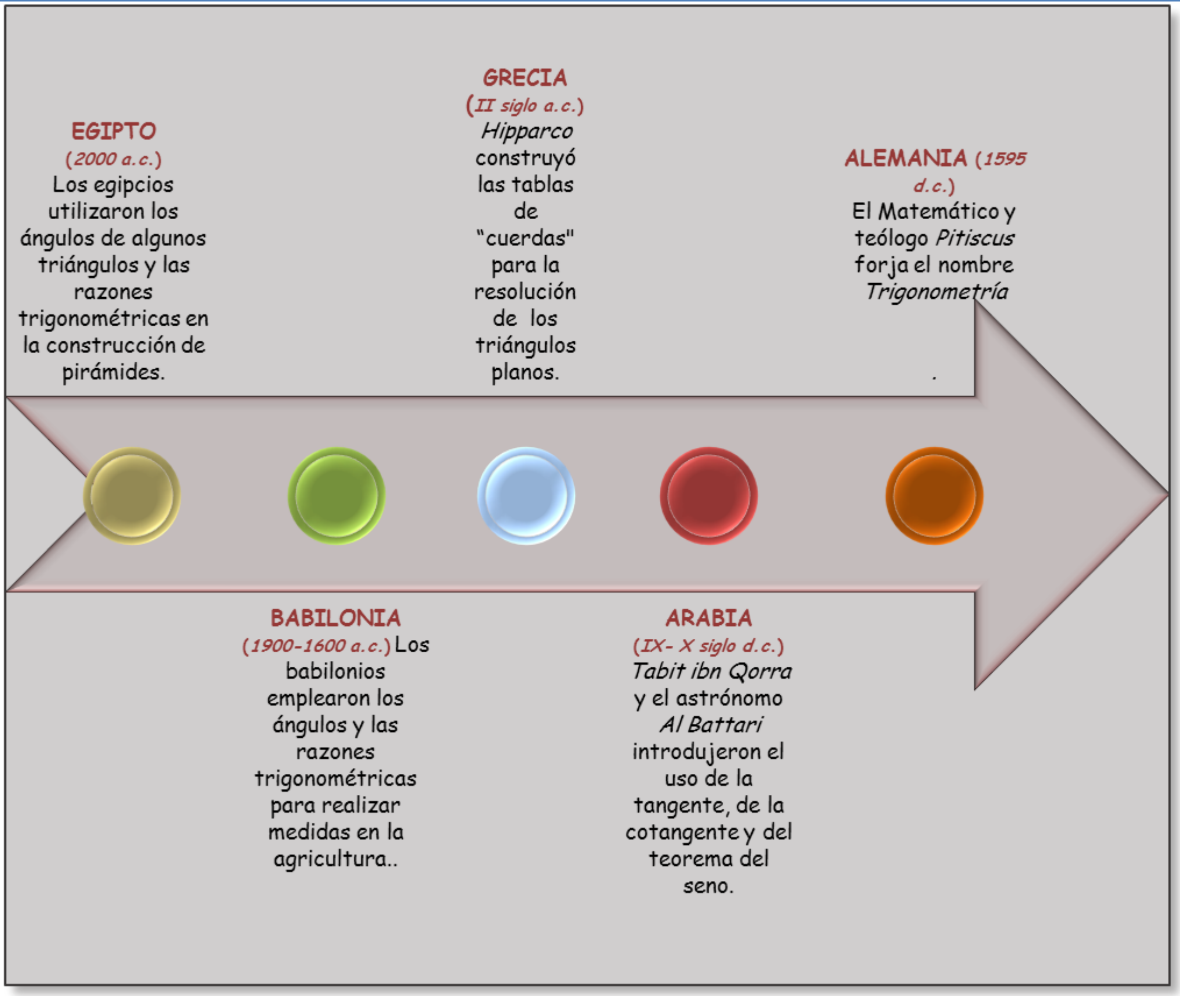
- Se narra la importancia de la trigonometría en el trabajo topográfico.

> Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría en la vida del hombre es la topografía que permite la medición de terrenos, el trazo de confines en estos, el monitoreo de movimientos, la realización de construcciones públicas y privadas y permite la representación gráfica del territorio, su relieve, la ubicación en este de elementos significativos etc.
> Efectivamente la medición y representación de terrenos, necesaria para una infinidad de aplicaciones en la vida del hombre, presenta un problema que sobresale desde un primer acercamiento al tema. No existe un terreno que tenga forma de un polígono conocido. En la realidad aparece evidente que los terrenos presentan formas irregulares, uno diferente de otro y con una gran variabilidad. Para poder medir estos terrenos es necesario descomponerlos en triángulos y resolver cada uno de ellos; llegando de esta manera a la resolución práctica de un polígono cualquiera.
> Por lo tanto, la resolución de problemas que derivan de la práctica de actividades topográficas, implica el manejo de estrategias, el reconocimiento de propiedades y la puesta en relación de diferentes conceptos y esto es sin duda un factor que impulsa el aprendizaje significativo de la trigonometría.

- El docente realiza las siguientes preguntas:

¿Será importante el uso de la trigonometría en la vida del hombre?
¿Por qué la trigonometría es importante en el trabajo topográfico?
¿Antiguamente la trigonometría habrá sido útil en la vida diaria?

- El docente presenta la historia de la trigonometría a través de la siguiente línea de tiempo.



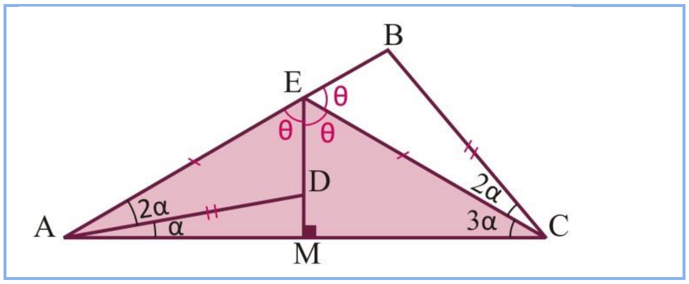
CONEXIÓN CON LA REALIDAD

La trigonometría tanto plana como esférica tiene una gran importancia por su implicancia en numerosas situaciones de la vida real.
La trigonometría es el conjunto de conocimientos que facilita la medición de los entornos próximos (topografía) como la de los entornos lejanos (astronomía) mediante métodos precisos y eficaces.
La aplicación de los conceptos trigonométricos ha permitido al hombre perfeccionar las técnicas de navegación, la elaboración de mapas geográficos, la construcción de obras arquitectónicas e ingenierísticas relevantes.

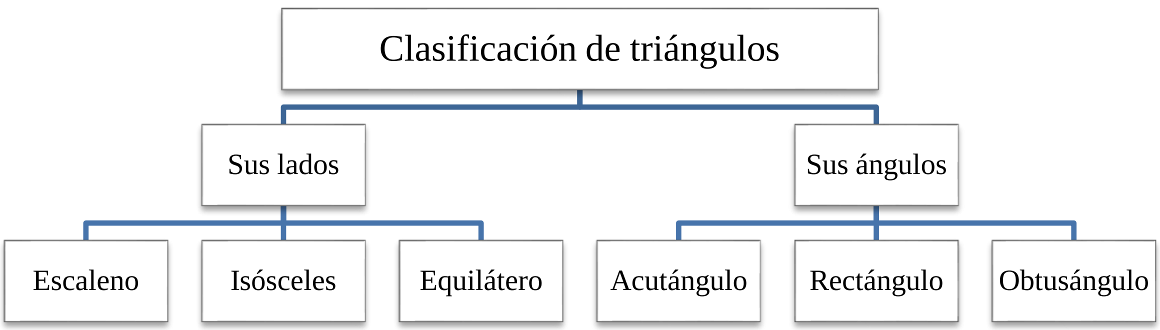
- Topografía: medición de alturas, distancias o áreas.
- Arte y arquitectura: estudio de perspectivas, espacios creados, áreas y volúmenes, sombras proyectadas, etc.
- Ingenierías: fuentes de energía sostenibles (placas solares cada vez más eficientes que buscan un ángulo determinado para aprovechar la energía solar un mayor tiempo posible).
- Husos horarios: en función del grado de inclinación de los rayos del sol sobre la tierra.

Desarrollo (60min.)

- Se presenta la siguiente situación a los estudiantes:



- ¿Qué observan en la figura?
- ¿Qué es un triángulo?
- ¿Qué características tiene el triángulo?
- ¿Cómo clasificamos los triángulos?



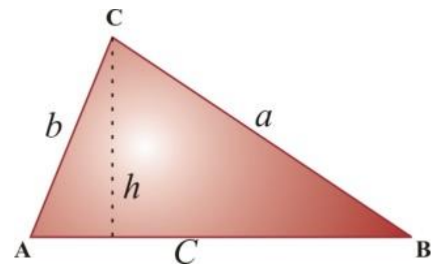
- El docente invita los alumnos a reconocer los diferentes tipos de triángulos presentes en la figura ilustrada.
- A partir de las preguntas formuladas anteriormente el docente presenta el tema.

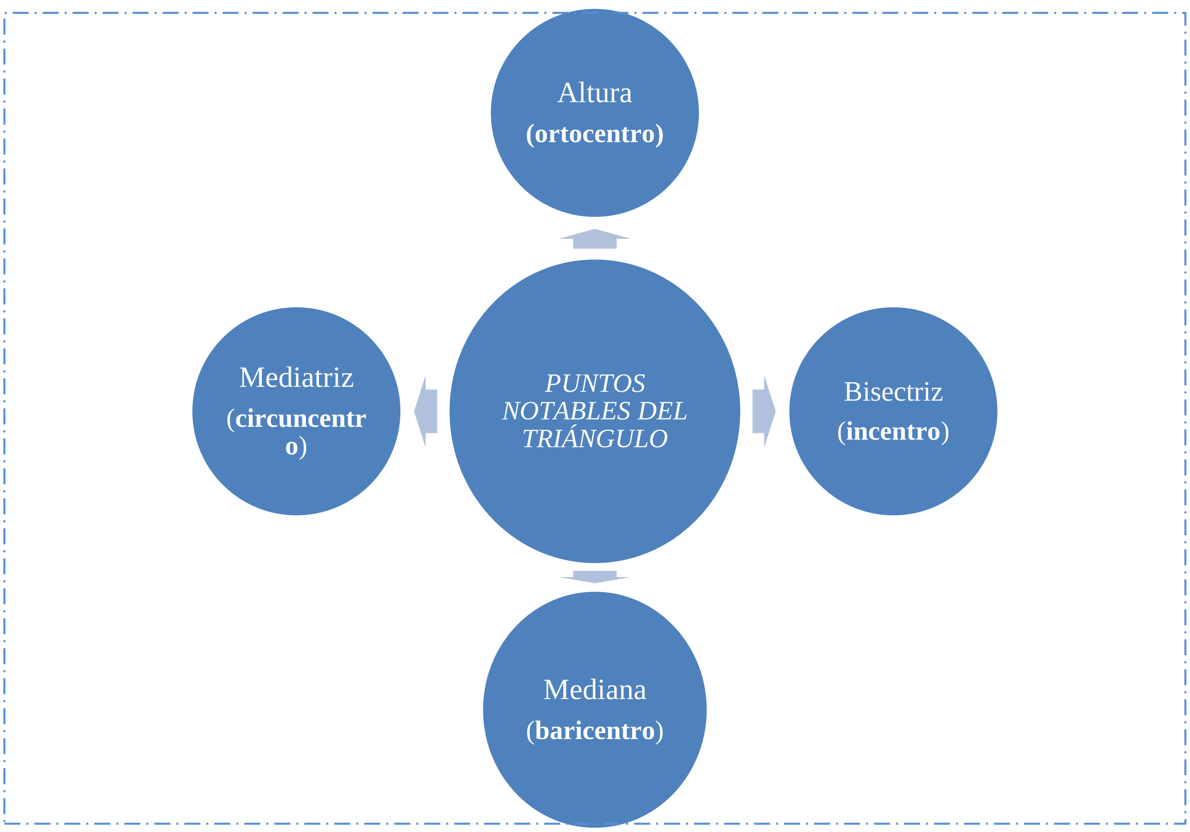
LOS TRIÁNGULOS

- El triángulo es un polígono de tres lados.
- Es el polígono mínimo, es decir que el número mínimo de lados para poder formar un polígono es tres. Todos los demás polígonos pueden ser descompuestos en diferentes combinaciones de triángulos.
- Es una figura plana rígida, e indeformable, es decir que dados tres segmentos se pueden formar solo triángulos congruentes entre ellos.
- Dados tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo. Para hacer esto, la medida de uno de sus lados debe ser menor que la suma de los otros dos lados y al mismo tiempo

mayor que su diferencia.

- El docente presenta la siguiente gráfica y junto con los estudiantes analizan los puntos notables y las propiedades de un triángulo.





PROPIEDADES

- El docente presenta la diferencia ente ángulos internos y externos.

Suma de ángulos internos: la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180º.

- El docente demuestra la propiedad de la "suma de los ángulos internos"

Ángulos externos: la medida de un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él. La suma de los ángulos externos de todo triángulo es 360º.

- El docente plantea la siguiente pregunta:

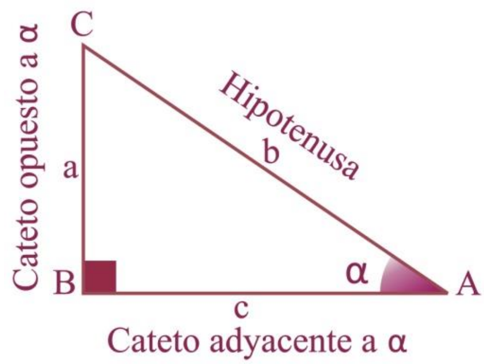
¿Qué quiere decir resolver un triángulo?

- Para resolver los problemas relacionados a los triángulos se pueden utilizar sus propiedades y algunos teoremas.

¿Cuál es el teorema más conocido?

TEOREMA DE PITÁGORAS

Entre los lados de un triángulo rectángulo existe una relación que se refiere a las áreas de los cuadrados construidos sobre dichos lados. Esta relación se conoce como teorema de Pitágoras.



En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

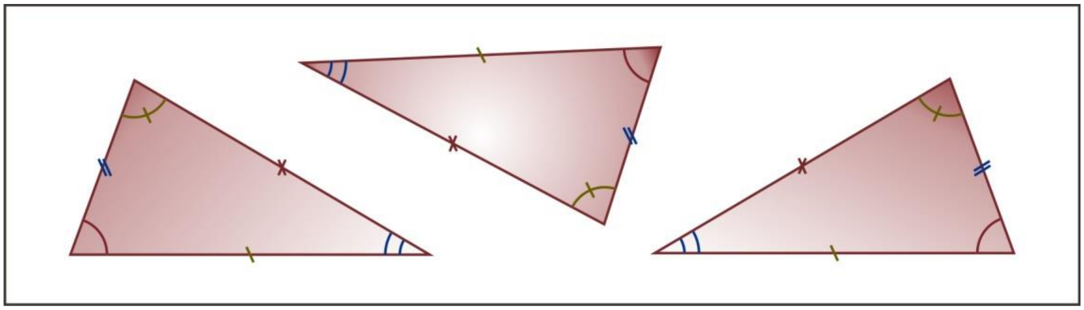
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2}$$

Ejemplo:
En un triángulo ABC, recto en A, AB = 4 cm y AC =3 cm, calcula la longitud de BC.

- Entre dos o más triángulos se pueden establecer relaciones como la semejanza y la congruencia.

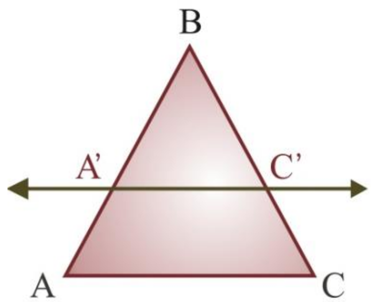
TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes cuando sus ternas angulares son iguales. Entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes se mantiene una determinada proporcionalidad.



- Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes, siendo que en cualquier triángulo equilátero todos sus ángulos miden 60^0.

TEOREMA DE THALES EN UN TRIÁNGULO.



Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados en partes proporcionales.

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$$

- El teorema de THALES se puede aplicar a cualquier triángulo. Así, si en el triángulo ABC se traza una recta (A'C') paralela al lado AC , se obtiene otro triángulo A'BC', semejante al triángulo ABC.

Ejemplo:

Pedro se sorprende de ver a su gato reflejado en la piscina. Se sabe que la distancia del muro, donde está el gato, hasta los pies de Pedro mide 5,6 metro y la piscina está a 1,6 metros de los pies de Pedro. ¿A qué altura está el gato si los ojos de Pedro están a 156 cm de altura?

Cierre (05 min.)

- El profesor junto a los estudiantes reúne los contenidos de la clase en un mapa conceptual para fijar visiblemente las ideas relacionadas a los triángulos.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 5,6 y 7 de texto de trabajo “El aprendiz topógrafo”

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Plumones

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1. UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2. INSTITUCIÓN EDUCATIVA :"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3. ÁREA :MATEMÁTICA
1.4. GRADO Y SECCIÓN :5º ÚNICA
1.5. FECHA :12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

"La medición de alturas con el espejo"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Clasifica ángulos según su posición. - Reconoce las propiedades de un triángulo rectángulo
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Representa gráficamente los elementos de un triángulo. - Representa gráficamente los diferentes triángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Interpreta del gráfico mostrado las semejanzas entre los triángulos. - Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras - Resuelve triángulos rectángulos conociendo la medida de dos de sus lados

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (10 min.)

- El docente saluda a los estudiantes y hace la siguiente pregunta:

¿Cómo podremos determinar la altura de los diferentes fenómenos, la altura de la infraestructura, del alumbrado público, del asta, de la torre de la iglesia y otros, sin hacer una medición directa?

- Los estudiantes dialogan en pareja e intercambian opiniones con los demás.
- El docente hace referencia a las actividades en las cuales centrará su atención:

"Se centrará la atención en las estrategias para determinar la altura haciendo uso del concepto y la semejanza de triángulos".

- El docente explica la actividad que se desarrollará y da las siguientes indicaciones.

  - ✓ Se forman grupos de 4 estudiantes.
  - ✓ El docente reparte un cuaderno a cada estudiante, que le servirá para anotar los datos de toda la actividad.
  - ✓ Se controla los materiales necesarios para la actividad: la huincha, el espejo y un plumón indeleble.

Desarrollo (70min.)

- El docente invita a los estudiantes a salir al patio de la institución y le indica de medir las siguientes alturas: dos grupos medirán la altura del asta y los otros dos la altura de la infraestructura.

Pasos para realizar la actividad …

a) El docente organiza todos los estudiantes en grupos de tres, cuatro integrantes. Cada grupo de estudiantes elige un observador que será quien realiza el experimento.

b) Cada grupo mide la altura de los ojos del observador apuntando la medida en el cuaderno de campaña.

c) Cada estudiante en su cuaderno de campaña realiza un croquis donde representa las posiciones del mástil, del espejo y del observador.

d) En un espejo plano se realiza una pequeña marca con un plumón indeleble de punta fina.

e) Se coloca el espejo en el piso a una determinada distancia de la base del mástil presente en todos los colegios, en la línea imaginaria que une los pies del observador con la base del objeto a medir.

f) El observador se desplaza a lo largo de la recta pasante por el espejo y la base del mástil, hasta que la punta de este, quede reflejada en el espejo, y coincida con la marca. Ahora la punta del mástil, su base y la marca en el espejo forman un triángulo semejante a lo formado por los ojos del observador, sus pies y la pequeña marca en el espejo.

g) Los integrantes del grupo miden la distancia entre los pies del observador y la marca del espejo y anotan todo en el cuaderno de campaña.

- Luego de la actividad el docente y los alumnos ingresan al salón de clase y se formula la siguiente pregunta.

¿Cómo resolvemos el problema?

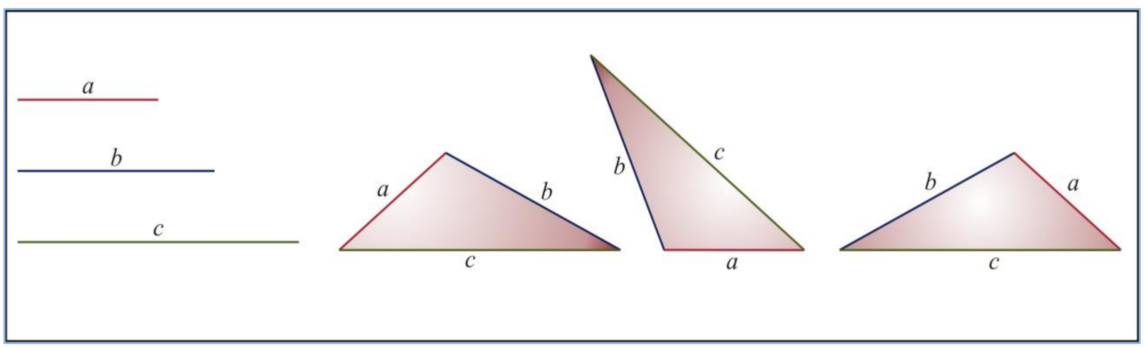
- Cada grupo resuelve el problema de la actividad utilizando la fórmula y comparte con los compañeros.
- Luego de esta actividad el docente presenta la siguiente pregunta:
  ¿Qué pasa cuando dos triángulos tienen la misma terna angular y los lados homólogos son iguales?
- Los estudiantes dialogan entre ellos y dan sus respuestas según sus pareceres.

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Dos triángulos son congruentes (≅) cuando los dos tienen la misma terna angular y los lados homólogos son iguales. Un triángulo es congruente a otro si a través de una rotación y de una traslación en el plano es posible sobreponerlo al primero. Es decir, que dos triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño aun cuando su orientación es diferente.

- Para establecer la congruencia entre triángulos existen tres reglas llamadas criterios de congruencia:

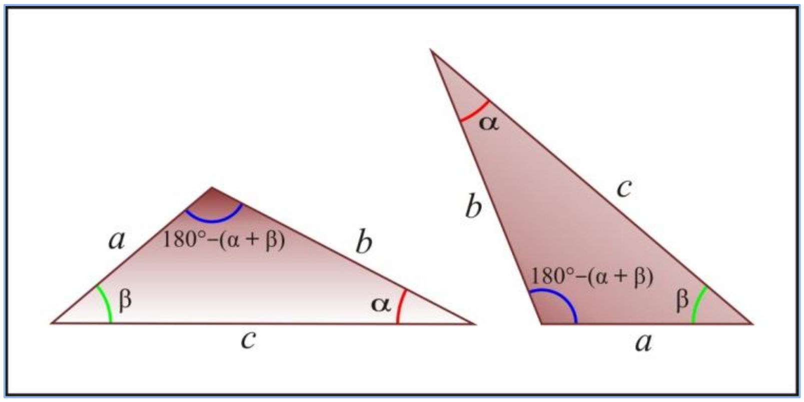
Criterio LLL: Si sus tres lados son respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



Por construcción del triángulo, dados tres segmentos, de los cuales el mayor es el más pequeño de la suma de los otros dos, se pueden formar infinitos triángulos, todos congruentes.

Criterio ALA: Si tienen un lado y los dos ángulos adyacentes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Se sabe que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo mide 180°.Si en los dos triángulos ABC y DEF dos parejas de ángulos son iguales, BAC = DFE y ACB=EDF, entonces también la tercera pareja de ángulos serán iguales; ABC=DEF. Esto comporta que los dos triángulos por definición son semejantes.

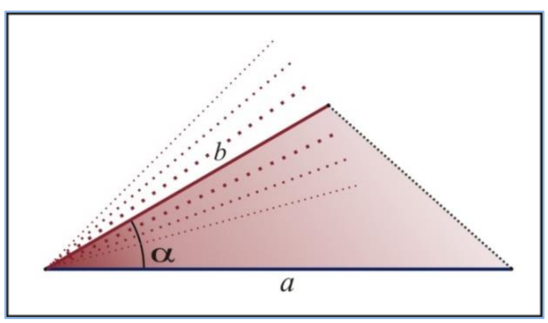


Se sabe también que en dos triángulos semejantes la proporción entre sus lados homólogos se mantiene constante; así si los lados AC y DF son iguales también las otras dos parejas lo serán AB=FE, BC=DE. Entonces los dos triángulos son congruentes.

Criterio LLA: Si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Criterio LAL: si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Por la construcción de triángulos, dados dos lados, la longitud del tercero depende de la amplitud del ángulo comprendido entre ellos. Así que dados dos lados y el ángulo que estos forman se pueden construir infinitos triángulos, uniendo los dos vértices libres, y todos son congruentes entre ellos.



- Los estudiantes junto al docente, desarrollan los ejercicios 9 y 10 del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”.

Cierre (10 min.)

- El docente hace las siguientes preguntas metacognitivas:
  ¿Cuándo dos triángulos son congruentes?
  ¿Cuáles son los criterios de congruencia?
  ¿Para qué sirve lo que aprendí?
- Los estudiantes escriben sus respuestas en una tira de cartulina y la pegan en la pizarra.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Realizar un mapa conceptual resumiendo todos los temas tratados. Triángulos, clasificación (lados y ángulos), suma de ángulos internos, Teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos y congruencia de triángulos.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Huincha
- Espejo
- Cuaderno de campaña, lápiz, plumones, borrador y cartulina.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

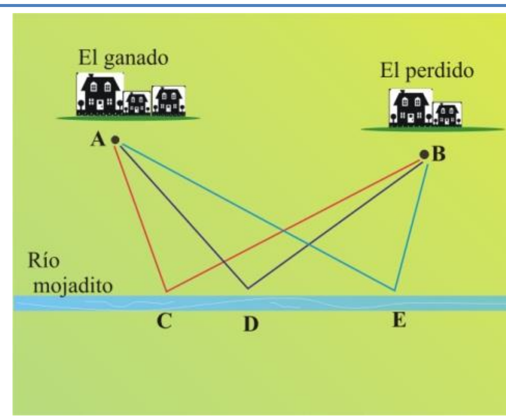
II. TÍTULO DE LA SESIÓN
“Los ángulos”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Clasifica ángulos según su posición. - Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares.
	Elabora y usa estrategias	- Determina el complemento y suplemento de un ángulo.

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (10 min.)

- El docente presenta la siguiente situación:

Los pueblos EL GANADO y EL PERDIDO se encuentran situados sobre la misma margen de un tramo del RÍO MOJADITO. Un pastor quiere llevar un rebaño de ovejas desde EL GANADO hasta EL PERDIDO y, de paso, acercarse al río para que allí beban agua sus animales. En la figura se trazan tres posibles caminos. ¿Qué figura geométrica se formó en cada uno?



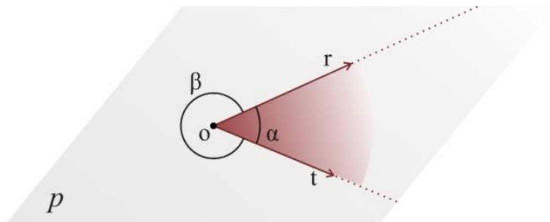
- Se pide a los estudiantes que encuentren todos los ángulos que observan en la figura.
- Un estudiante muestra y explica todos los ángulos encontrados, sus elementos y su notación simbólica.

Desarrollo (70min.)

• A partir de la situación inicial el docente presenta el tema.

LOS ÁNGULOS

El ángulo es la porción del plano delimitada por dos semirrectas que tienen el origen en común. A las dos semirrectas se les llama lados del ángulo y al punto de origen, vértice.



P: plano

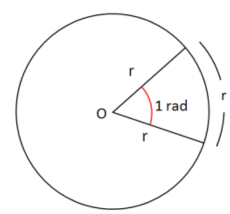
$\overrightarrow{Or} y \overrightarrow{Ot}$: rayos

α y β: ángulos

O: origen

SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

a. Sexagesimal: el sistema sexagesimal divide el ángulo completo en 360 partes iguales, llamados grados sexagesimales (°). Este sistema tiene como principal característica la de dividir sus unidades en sesenta sub-unidades, de nivel inferior; así el grado sexagesimal, que es la unidad principal de este sistema, se divide en 60 primos ('), unidad secundaria. Los primos a la vez se dividen en 60 segundos (") que son las unidades más pequeñas.
b. Centesimal: El sistema centesimal, utilizado en muchos instrumentos topográficos y en sistemas militares, divide el ángulo giro en 400 partes, llamadas grados centesimales (g). Este sistema utiliza una base 10 como nuestro sistema numérico, así que cada unidad está compuesta por 10 sub-unidades
c. Radial: El sistema radial es un sistema de medición de ángulos que destaca por su importancia y su uso en el estudio de la trigonometría.
   Aparentemente es más complejo porque, a diferencia de los demás sistemas que dividen el ángulo giro en un número finito de partes iguales, en este sistema la unidad de medida no se obtiene fraccionando un ángulo giro. El radián (rad) es la medida de un ángulo central que subtiende a una longitud de arco de circunferencia igual al radio.



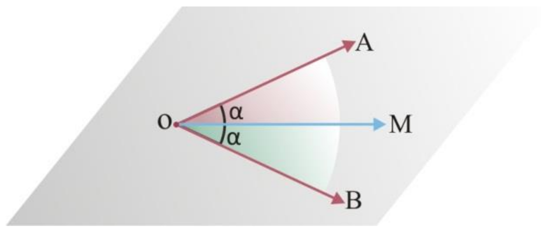
• El docente pregunta:
¿Cuál es el instrumento de medida para medir el ángulo?
Los ángulos generalmente se miden en el sistema sexagesimal utilizando un transportador.

> El transportador, es la herramienta de escritorio más utilizada para medir los ángulos. Para medir un ángulo en grados, se alinea el lado inicial del ángulo con el radio derecho del transportador (semirrecta de 0°) y se determina en sentido contrario al de las manecillas del reloj la medida que tiene. En caso que sea necesario se prolongará los brazos del ángulo para mejor visibilidad.

BISECTRIZ

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de dicho ángulo.

- La bisectriz divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.



de la gráfica deducimos que: $\angle AOM = \angle MOB$

- Se explica la clasificación de los ángulos, a partir del siguiente esquema.

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

- según su amplitud
  - ángulo recto
  - ángulo agudo
  - ángulo obtuso
- según su medida
  - conseutivos
  - adyacentes
  - opuestos por el vértice
- según su suma
  - complementarios
  - suplementarios

- Los estudiantes a manera de ejemplo resuelven los ejercicios 7, 8, 9, 10 y 11de la página 16 del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”.

Cierre (10 min.)

- Los estudiantes en pareja, hacen un resumen general mediante un organizador visual.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Desarrollar los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del texto de aprendiz topógrafo.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “el aprendiz topógrafo”
- Plumones
- papelotes

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"Midiendo la inclinación de la carretera"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Formula estrategias de solución de problemas de ángulos entre rectas paralelas
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Establece relaciones entre ángulos formados por rectas paralelas y una secante

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (10 min.)
• El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea dejada en la clase precedente. Junto a los estudiantes resuelve el ejercicio n°11 a la pagina 16 del cuaderno de trabajo "El aprendiz topografo". • Al resolver el ejercicio el docente conduce los alumnos en un repaso general de la noción de los ángulos. ¿Cómo definimos un ángulo? ¿Cuándo dos ángulos son consecutivos? ¿Cómo podemos trazar un ángulo de amplitud conocida? ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?
Desarrollo (70min.)
• El docente informa sobre el propósito de la lección, la actividad que se va a realizar y los materiales que se van a utilizar: "Los ángulos no solo están en los libros de geometría, en los ejercicios, en los dibujos de los ingenieros. También en el entorno en el cual vivimos hay una infinidad de ángulos aun si no nos damos cuenta.

Así un rayo de sol que penetra a través de las nubes forma en el aire un ángulo con la superficie terrestre, las siluetas de los montes que estallan en el cielo del amanecer nos representan una multitud da ángulos, un camino empinado que atraviesa las chacras forma un ángulo con una imaginaria línea horizontal

Estos ángulos no pueden ser medidos con un normal transportador, no los tenemos en una hoja de papel.

Hoy experimentaremos como medir un ángulo real, la inclinación de un tramo de carretera, utilizando un rudimental instrumento topográfico, el "clinómetro". Este instrumento de fácil construcción y uso, nos permitirá medir un ángulo que hace parte de nuestro entorno."

El clinómetro

El clinómetro es un instrumento topográfico con el cual se puede determinar la inclinación de un determinado plano o línea recta, la plataforma de una carretera, la superficie de un terreno o de un talud, el trazo de un canal etc. Los topógrafos utilizan este instrumento para medir inclinaciones o para buscar los puntos de un trazo con una dada inclinación.

Para construirlo: Se necesita una pieza rectangular de cartón duro o de triplay (de unos 12x32 cm). Se recorta un área rectangular como en la figura 1, con el fin de colocar ahí la mano. Se colocan dos argollas redondas en el lado superior que servirán de puntador.

En un cuadrante de papel, con los ángulos indicados se ata una cuerda en la parte de arriba y, en la otra punta, se fija un pequeño peso que indique el ángulo de 0°.

¿Cómo usarlo?

Cuando se ve el objeto a través de las dos argollas la cuerda indica la posición angular referida a 0º del horizonte.

- El docente organiza a los estudiantes en dos grupos, les reparte el clinómetro y la varilla para realizar la medición.

Los pasos para seguir la actividad…

a) Se fija el tramo de la calle que se va a medir.

b) Cada grupo hace un croquis de la calle en el cuaderno de campaña.

c) Cada grupo escoge dos estudiantes, uno que observe con el clinómetro y el otro que pueda sostener la varilla (mira.)

d) Se gradúa la varilla hasta los ojos del observador.

e) Se pone un punto de referencia donde se ubica el observador con el clinómetro y el ayudante se ubica con la varilla en el segundo punto establecido en la calle.

f) Para determinar la inclinación de la calle el observador debe apuntar con la mira del clinómetro a la parte central superior de la varilla.

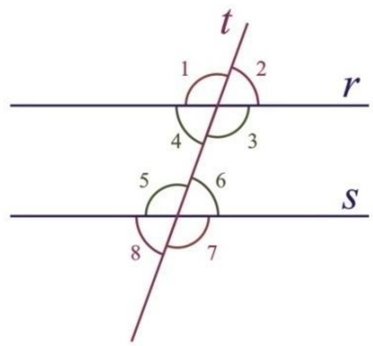
g) Se anota en el cuaderno de campaña el ángulo que marca el clinómetro, así se obtiene la inclinación de la calle.

h) En el salón cada grupo representa gráficamente los ángulos de todas las calles.

- El docente hace la siguiente pregunta:
  ¿Qué pasa si dos rectas paralelas están intersecadas por una secante?
- Los estudiantes dialogan con el compañero de carpeta y participan oralmente.

ÁNGULOS FORMADOS POR UN HAZ DE RECTAS

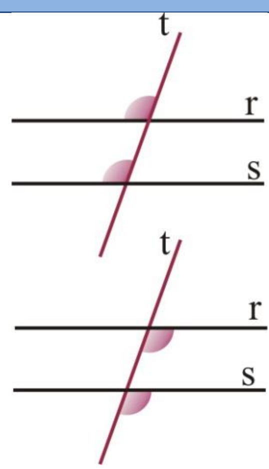
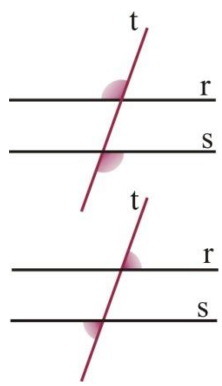
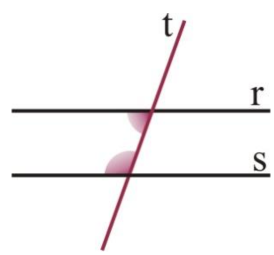
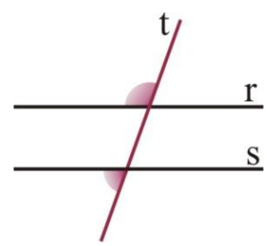
Al cortar dos rectas paralelas "r" y "s" por una tercera recta "t" secante a estas, se forman 8 ángulos, 4 en cada punto de intersección.



- Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 2$ y $\angle 4$, $\angle 5$y $\angle 7$, $\angle 6$ y $\angle 8$ forman pares de ángulos opuestos por el vértice, por eso son congruentes entre ellos.
- Siendo r y s dos rectas paralelas, la recta t las incide con una igual inclinación así que los ángulos $\angle 2$y$\angle 6$son congruentes.
- De esta forma se afirma que los ángulos$\angle 1$,$\angle 3$,$\angle 5$y $\angle 7$son congruentes como también los ángulos $\angle 2$,$\angle 4$,$\angle 6$y $\angle 8$.
- Las rectas r y s dividen el plano en tres partes. Llamaremos parte interna a la porción del plano delimitada por ambas rectas. Según la posición que los ángulos tienen respecto a estas tres zonas podemos decir:
- Los ángulos $\angle 4$, $\angle 3$,$\angle 5$, y $\angle 6$ son llamados internos, porque están internos a las 2 rectas paralelas "r", "s";
- Los ángulos; $\angle 1$,$\angle 2$,$\angle 7$, y $\angle 8$ son llamados ángulos externos, porque están externos a las 2 rectas paralelas "r" y "s".
- La recta t divide el plano en dos mitades. Los ángulos $\angle 1$,$\angle 4$,$\angle 5$, y $\angle 8$ están todos contenidos en el semiplano izquierdo. Estos se llaman ángulos conjugados. Al igual también los ángulos $\angle 2$,$\angle 3$,$\angle 6$, y $\angle 7$, son conjugados por ser todos contenidos en el semiplano derecho.
  Los ángulos $\angle 4$ y $\angle 5$, $\angle 3$ y $\angle 6$ son llamados conjugados internos, mientras los ángulos $\angle 1$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 7$ son llamados conjugados externos.
- Cuando las rectas r y s son paralelas los pares de ángulos conjugados, internos y externos, son

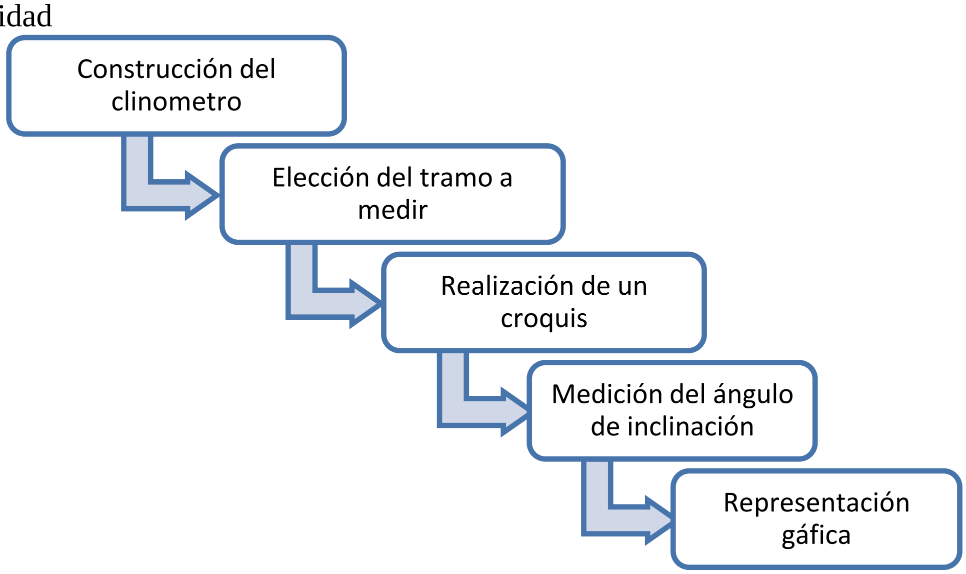
suplementarios, o sea suman 180°.

Por la posición que ocupan, los ángulos formados por un haz de rectas paralelas cortadas por una secante, se pueden clasificar de la siguientes manera:

CORRESPONDIENTES	*ALTERNOS*	*CONJUGADOS INTERNOS*	*CONJUGADOS EXTERNOS*
			

Cierre (10 min.)

- El docente y los estudiantes representan gráficamente los pasos que los han llevados a realizar la actividad



V. TAREA A TRABAJAREN CASA

- Concurso, constructores de clinómetros:
- Cada pareja construye en su casa un clinómetro y una vara de mira.

- Ejercicios nº 6, 7, 18, 19, 20 página 16 y 17 cuaderno de trabajo “El Aprendiz topógrafo”.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Plumones
- Clinómetro casero, mira
- Cuaderno de campaña

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

“Relación de conversión de los sistemas”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Establece relaciones entre los sistemas de medidas angulares
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Representa medidas angulares en diferentes sistemas - Aplica las fórmulas de conversión para la medición en los tres sistemas angulares
	Elabora y usa estrategias	- Efectúa conversiones de medidas angulares
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Resuelve problemas utilizando los tres sistemas de medición angular

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (15 min.)

- El docente saluda a los estudiantes y revisa la terea. Se presenta el nombre de la sesión “Relación de conversión de los tres sistemas".

- El docente comenta sobre cómo la trigonometría es una herramienta que permite calcular ángulos y distancias de forma indirecta.
- Se presenta la siguiente situación:

¿Cuál es el ángulo formado a las 12:25, entre la aguja que indica los minutos y la aguja que marca las horas?

- ➢ ¿Cómo lo calculamos?
- ➢ ¿Hay una fórmula para calcular dicho ángulo?

- El docente junto con los estudiantes resuelve la situación, luego plantea las siguientes preguntas:
  - ➢ ¿Este mismo ángulo, podremos representarlo en otro sistema de medida?
  - ➢ ¿Cómo se hace la conversión de un sistema a otro?
- Los estudiantes dialogan entre ellos y dan sus opiniones, luego el profesor anota en un papelote las respuestas para compararlas durante la clase.

Desarrollo (65min.)

- A partir de la situación inicial el docente da a conocer el tema.

RELACIÓN DE CONVERSIÓN DE LOS TRES SISTEMAS

- ➢ Se puede medir la amplitud de un ángulo usando diferentes sistemas de medidas.

El ángulo giro por ejemplo se puede expresar como el ángulo cuya amplitud mide 360°, pero podemos expresarlo como $2\pi^{\text{ rad}}$ o 400^{g}; esto porque cada sistema de medición tiene su unidad de medida. Así un mismo ángulo puede ser expresado a través de diferentes medidas.

Ángulo de una vuelta

α

	α = 360º	Sexagesimal(º)
	α = 400^g	Centecimal (^{g})
	α = 2π ^{rad}	Radial (^{rad})

Luego:

180º	200	π
$\frac{180}{20} = 9°$	$\frac{200}{20} = 10^g$	$\frac{\pi}{20}$

- Existe entonces una relación bien determinada entre estos tres sistemas de medición que nos permite pasar de uno a otro.
  - ✓ Para pasar de los grados sexagesimales a los grados centesimales y a los radiantes se utilizan las siguientes igualdades:

DE SEXAGESIMAL A		**DE CENTECIMAL A**		**DE RADIAL A**	
Centesimal	**Radial**	**Sexagesimal**	**Radial**	**Sexagesimal**	**Centesimal**
$\frac{S°}{180} = \frac{C^g}{200}$	$\frac{S°}{180} = \frac{R^{rad}}{\pi}$	$\frac{C^g}{200} = \frac{S°}{180}$	$\frac{C^g}{200} = \frac{R^{rad}}{\pi}$	$\frac{R^{rad}}{\pi} = \frac{S°}{180}$	$\frac{R^{rad}}{\pi} = \frac{C^g}{200}$
$C^g = 200 \times \frac{S°}{180}$	$R^{rad} = \pi \times \frac{S°}{180}$	$S° = 180° \times \frac{C^g}{200}$	$R^{rad} = \pi \times \frac{C^g}{200}$	$S° = 180 \times \frac{R^{rad}}{\pi}$	$C^g = 200 \times \frac{R^{rad}}{\pi}$

- Con la finalidad de que los estudiantes perciban mejor el tema tratado, el docente propone realizar la siguiente actividad: “Midiendo los ángulos”.

- El docente comenta acerca de la actividad.

En su profesión, el topógrafo, se enfrenta con el uso de diferentes sistemas de medidas, diferentes sistemas de referencias etc. Entre estos casos, un ejemplo que todos conocemos es lo que se presenta al medir es la amplitud de los ángulos.
Existen diversos sistemas de unidad de medida para los ángulos, entre los más usados en el mundo de la topografía resaltan el sistema sexagesimal, sistema centesimal y el sistema radial.
Los topógrafos trabajan siempre con medidas de longitudes y con medidas de ángulos, y es muy frecuente que un topógrafo tenga la necesidad de convertirlos de un sistema a otro.
Todos los sistemas de medición de los ángulos consideran como referencia el ángulo giro y comparan la amplitud de cada ángulo con la amplitud de este. Así que la amplitud de un ángulo siempre nos indica a que parte de un ángulo giro corresponde. Para pasar de un sistema al otro se utilizan unas fórmulas de conversión; esta es una operación fácil pero requiere mucha práctica para poder transportar, con precisión y rapidez, los ángulos de un sistema al otro.

El transportador horizontal
El transportador horizontal es un instrumento topográfico que nos ayuda a calcular los ángulos entre dos puntos establecidos.
Cómo se usa:
Se usa posicionando el transportador horizontal en el punto elegido y se establece la pareja de puntos de los cuales se requiere medir la distancia angular.
Apuntando con el instrumento el primer punto se pone en el cero del transportador, luego se apunta al segundo punto y se lee la apertura angular.

La brújula
Es un instrumento que sirve para orientarse determinando la dirección del norte magnético terrestre.
En el cuadrante de la brújula hay una aguja que se orienta siempre indicando el norte; apuntando con la mira de la brújula un punto al horizonte se puede leer el ángulo que la dirección de mira forma con la dirección del norte. Repitiendo la misma operación, se apunta a un segundo punto, la diferencia de los ángulos nos indica la distancia angular entre los dos puntos.

$$\alpha = \text{lectura } 1 - \text{lectura } 2$$

- El docente organiza los grupos y les invita salir al patio de la institución educativa.

Pasos para realizar la actividad…

a) Cada grupo escoge dos puntos al horizonte los cuales desea medir la distancia angular y un punto de estación en el patio.
b) Cada grupo, realiza en el cuaderno de campaña un croquis del punto de estación y de los dos puntos establecidos para la medición.

c) El estudiante que realiza la observación se posiciona en el punto de estación, luego apunta con la mira de la brújula el primer punto, lee el ángulo formado entre la línea de mira y el norte.

d) El observador repite la misma operación para el segundo punto.

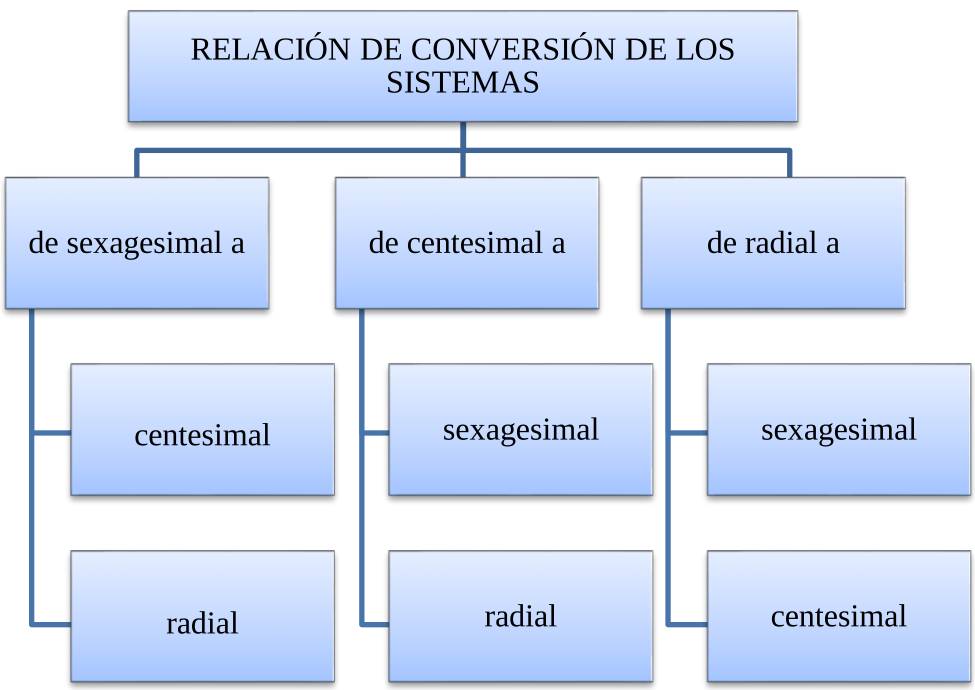
e) El estudiante que desarrolla el papel de ayudante, escribe los datos obtenidos en el cuaderno de campaña y calcula la distancia angular, utilizando la formula dada por el docente en el primer momento de la actividad.

f) Cada grupo repite varias veces este proceso, midiendo la distancia angular de diferentes parejas de puntos indicadas por el docente, así cada integrante del grupo puede experimentar el uso de este instrumento.

g) En el salón, todos los alumnos, realizan la representación gráfica y luego transforman en los tres sistemas de medida, los ángulos obtenidos durante la actividad.

Cierre (10 min.)

- Los estudiantes representan gráficamente los pasos que los ha guiado a realizar la actividad.
- Los estudiantes realizan el siguiente esquema



V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 3, 4, 5 y 7 de la página 24, del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”

- Plumones
- Regla
- Reloj
- Brújula
- Cuaderno de campaña

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

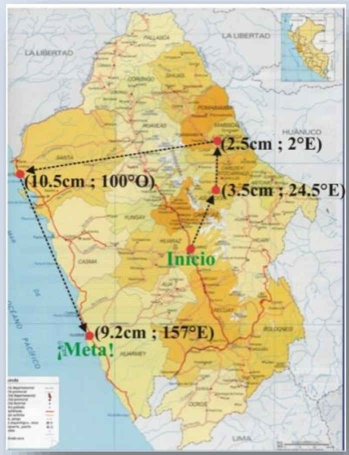
Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"Aprendo a orientarme"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Diferencia un ángulo geométrico de uno trigonométrico; así como un ángulo positivo de uno negativo.
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Determina las medidas de ángulos orientados.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados.

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (25 min.)
• El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea. • Antes de empesar con el tema de la sesión el docente forma cuatro grupos y les propone jugar un juego. • El docente presenta el nombre del juego, Itinerari de ángulos,y da las reglas correspondientes. 1era regla: no deben ver el mapa de los demás grupos. 2da regla: los puntos deben ser bien marcadas con el lapicero rojo o azul. 3ra regla: se quita un punto por cada error. • El juego consiste en: *Cada jugador dispone de un mapa (mapa de Ancash), el mismo para todos, a gran escala, donde está indicada claramente la orientación. El profesor indica un lugar sobre el mapa que servirá de punto de partida (punto inicial-Huaraz). Cada grupo hace una marca en el punto de*

partida. (Es conveniente proteger el mapa de las miradas vecinas). Seguidamente, el profesor indica una distancia y una dirección mediante ángulos de azimut.
Todos los puntos que se les indicará toman como punto de referencia al norte.
El punto de partida es Huaraz.



El jugador hace otra señal en el lugar que cree que corresponde según las indicaciones que dio el jefe de juego. En el último lugar indicado, el profesor anuncia "META". Cada grupo quita su pantalla o destapa su mapa. Se comparan los resultados.

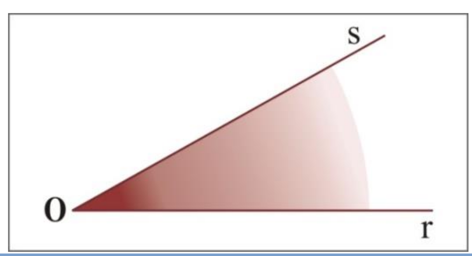
- Al finalizar el juego el docente indica el grupo ganador.
- Luego todo el proceso lo desarrollan nuevamente de manera individual.
- El docente indica el propósito y el tema de la sesión, “los ángulos orientados”.

Desarrollo (55min.)

- El docente presenta el tema:

ÁNGULOS ORIENTADOS

En algunos problemas es conveniente dar a los ángulos una orientación o sentido. Un ángulo se dice orientado cuando se establece cuál de los dos lados debe considerarse el primero.



El ángulo α de vértice O, delimitado por las semirrectas r y s, puede formarse a partir de la rotación del lado r, primer lado del ángulo, hasta formar el lado s. Esto se indica con la notación $r\angle s$. Al contrario si se establece que el ángulo se ha formado por la rotación del lado s, primer lado del ángulo, la notación será $s\angle r$. De esta manera el ángulo a pesar que tenga una misma amplitud puede tener dos distintas orientaciones y asignaremos a cada una de ellas un signo positivo o negativo.

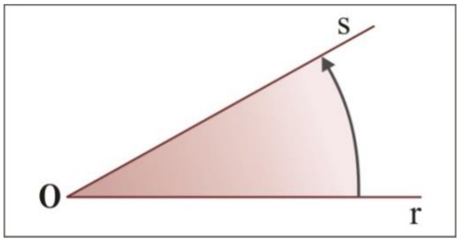


Figura 1

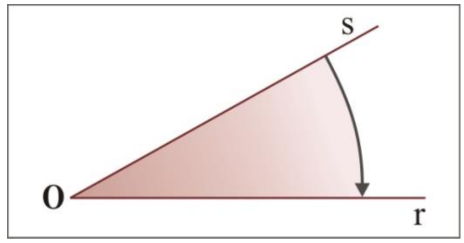


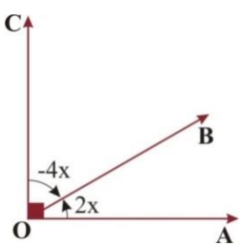
Figura 2

En las figuras 1 y 2, se puede apreciar que los dos ángulos, tienen una misma amplitud, pero diferente orientación. La flecha en el arco nos indica el sentido de la rotación que ha formado cada ángulo, de *r* a *s* en el primer caso y de *s* a *r* en el segundo. Estos ángulos se dicen uno opuesto del otro y se le asigna un signo positivo a uno y negativo al otro, según una determinada convención.

En trigonometría se asigna un valor positivo a los ángulos formados por la rotación del primer lado, lado de origen, en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, rotación antihoraria.

Ejemplo:

Calcular el valor de *x*.



- El ángulo AOB es positivo, mientras el ángulo BOC es negativo porque la orientación es en sentido horario.
- 2x – (-4x) = 90°
- 2x + 4x = 90°
- 6x = 90°
- x =15°

- Los estudiantes resuelven los ejercicios propuestos de la página 30 del texto de trabajo “El aprendiz topógrafo”

Cierre (10 min.)
• Se hace un resumen general de la clase ÁNGULOS ORIENTADOS Cuando la orientación de un ángulo es en sentido antihorario, el águlo es positivo. Cuando la orientación de un ángulo es en sentido horario, el ángulo es negativo.
V. TAREA A TRABAJAR EN CASA
• Resolver los ejercicios 4 y 6 de la página 24 del texto de trabajo “El aprendiz topógrafo”
VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR
• Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo” • Lápiz y borrador

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"Realizando los trazos"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Elabora y usa estrategias	- Resuelve problemas que implican el reconocimiento de sistemas de coordenadas polares - Resuelve problemas que implican el cálculo de la medida de ángulos orientados

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (25 min.)
• El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea de la clase anterior y recoge los productos de cada grupos (clinometros caseros). • Cada grupo expone su trabajo, describiendo el proceso realizado al construir el clinometro, sus partes fundamentales (mira y cuadrante), su utilidad en la topografía y el proceso para medir ángulos con el clinometro. • El docente terminada la exposición pide de calificar los diferentes productos aplaudiendo. • Se determina el grupo ganador. • Los estudiantes responeden las preguntas y el docente los socializa en la pizarra.
Desarrollo (55min.)
• El docente menciona el propósito de la actividad que se realizará durante la sesión, el motivo y el instrumento que se va a utilizar. *Los topógrafos utilizan las coordenadas polares para tomar medidas de los linderos de las parcelas de terreno, para realizar mapas. Ellos disponen de instrumentos de gran precisión como el teodolito y la estación total.* *Para poder medir un terreno y luego poder representarlo en el mapa, los topógrafos fijan en el*

terreno un punto llamado estación. Ponen una marca bien firme en el terreno y allí colocan su instrumento.
Después de esto, eligen un punto bien visible, también lejos de la estación; apuntando con el instrumento usado, ajustan su transportador de ángulos horizontal en cero. Este es el azimut.
Para tomar las medidas, el topógrafo apuntando con el teodolito el punto a medir, lee registra en su cuaderno de campaña la medida del ángulo azimutal, y la distancia.
Una vez tomadas las medidas de todos los puntos, con el uso del trasportador y de una regla el topógrafo representa gráficamente el terreno en un mapa.

- El docente organiza los grupos y les invita a salir al patio de la institución educativa.

Afuera cada grupo se pone en el lugar correspondiente y el docente les da algunas instrucciones.

Pasos para realizar la actividad…

a) Dibujar en el cuaderno de campaña un croquis del patio del colegio, definiendo los puntos del contorno que se van a medir y el punto que representará el azimut.
b) Elegir en el patio un lugar del cual se puedan observar todos los puntos significativos (esquinas). Está será el punto de estación.
c) Elegir un punto firme para determinar el eje polar; sí utilizan la brújula, este será la dirección del norte magnético.
d) Situar el cero del marcador del transportador con el eje polar, luego apuntar el punto que se quiere medir; el ayudante anota en el cuaderno de campaña el ángulo formado entre el eje polar y el segundo punto.
e) Medir con la huincha la distancia del eje polar, que sería el primer punto y el segundo punto, formando así un triángulo con los tres lados conocidos.
f) Este procedimiento se realiza por todos los puntos establecidos en el contorno del patio de la institución, de esta manera queda representado el área del patio descompuesto en triángulos con los tres lados conocidos.
g) Acabado el trabajo de medición, representar el área del patio y compararlo con los demás equipos.

Cierre (10 min.)

- Los estudiantes representan gráficamente los pasos que han desarrollado para realizar la actividad.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios que no han sido resueltos durante la clase de las páginas 30.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”

- Transportador horizontal
- Huincha
- Cuaderno de campaña
- Lápiz y borrador

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

“El seno y el coseno”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Define una circunferencia trigonométrica - Identifica los elementos de la circunferencia trigonométrica
	Elabora y usa estrategias	- Calcula las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal - Resuelve ejercicios aplicando la definición del seno y coseno
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Discrimina entre el concepto de seno y de coseno

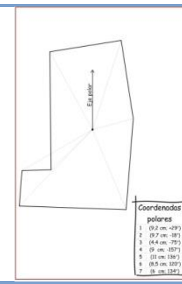
IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (15 min.)

- El docente saluda a los estudiantes y anuncia el tema y el propósito de la sesión.
- El docente presenta la siguiente actividad. Para ello forma cuatro grupos con los cuales se trabajará de manera comunitaria.

A cada grupo se les entregará una hoja donde está ubicado un punto, que servirá como punto de origen y un eje, que servirá de eje polar. Se darán también las coordenadas polares correspondientes a los vértices de una poligonal.
La actividad consiste en ubicar los puntos según las indicaciones de las coordenadas, y luego unir todos los puntos con una línea.

- La final de esta actividad cada grupo compara su resultado con el de otros grupos.
- A partir de la actividad realizada el docente repasa la idea de ángulos orientados, contenido previo para los propósitos de la clase.

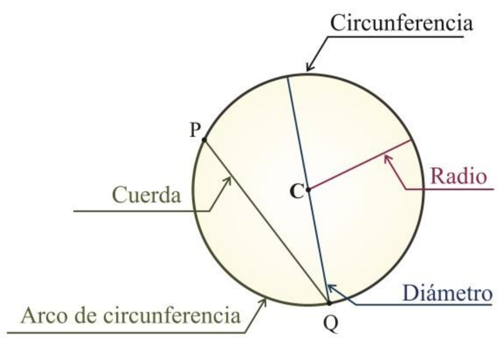


Desarrollo (60min.)

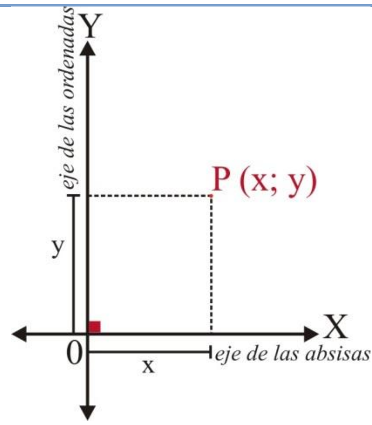
- El docente anuncia el tema que se desarrollará en la sesión:

“DEFINICIÓN DE SENO Y COSENO”

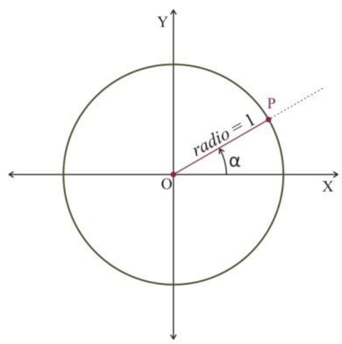
- El docente hace un repaso sobre la definición del círculo y circunferencia, y del plan cartesiano; haciendo las siguientes preguntas:
  - ✓ ¿qué es el círculo?
  - ✓ ¿qué es la circunferencia?
  - ✓ ¿cuáles son los elementos de la circunferencia?
- El docente escucha las repuestas de los estudiantes y juntamente con ellos define cada uno de los elementos mediante la siguiente gráfica:



- ➢ Si consideramos un *Plano Cartesiano*, o sea un plano en el cual se define un sistema de referencia constituido por dos rectas perpendiculares que lo dividen en cuatro partes llamadas *cuadrantes* y cuyos puntos están definidos en forma univoca por un par ordenado de números reales llamado *coordenadas cartesianas* estas representan las distancias del punto respectivamente del eje vertical y del eje horizontal.



- A partir de estos conocimientos previos el docente define el concepto de "circunferencia trigonométrica".

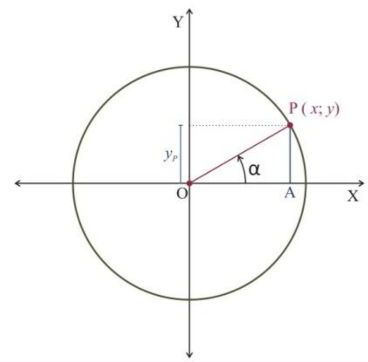
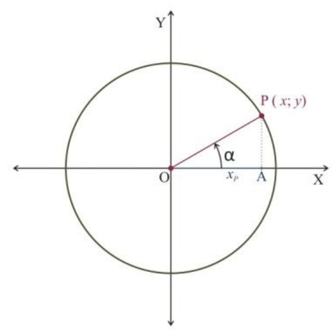


La *circunferencia trigonométrica*, es aquella cuya medida del radio es igual a la unidad de medida del sistema cartesiano y tiene el centro coincidente con el origen del sistema de referencia.

ÁNGULO NORMAL

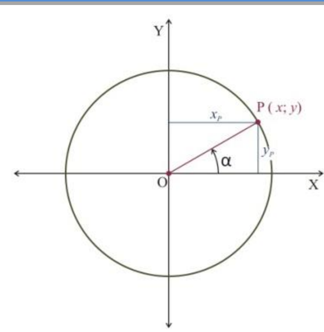
Un ángulo trigonométrico está en posición normal cuando el lado inicial coincide con el lado positivo del eje de las abscisas, su vértice coincide con el origen del plano, y su lado final está en cualquier cuadrante del plano.

- El docente explica los conceptos del seno y coseno de un ángulo orientado en la circunferencia trigonométrica.

SENO El seno del ángulo orientado α es la ordenada de la intercesión entre la circunferencia trigonométrica y el segundo lado del ángulo, o sea el punto P.	
COSENO El coseno del ángulo orientado α es la abscisa de la intercesión entre la circunferencia trigonométrica y el segundo lado del ángulo, o sea el punto P.	

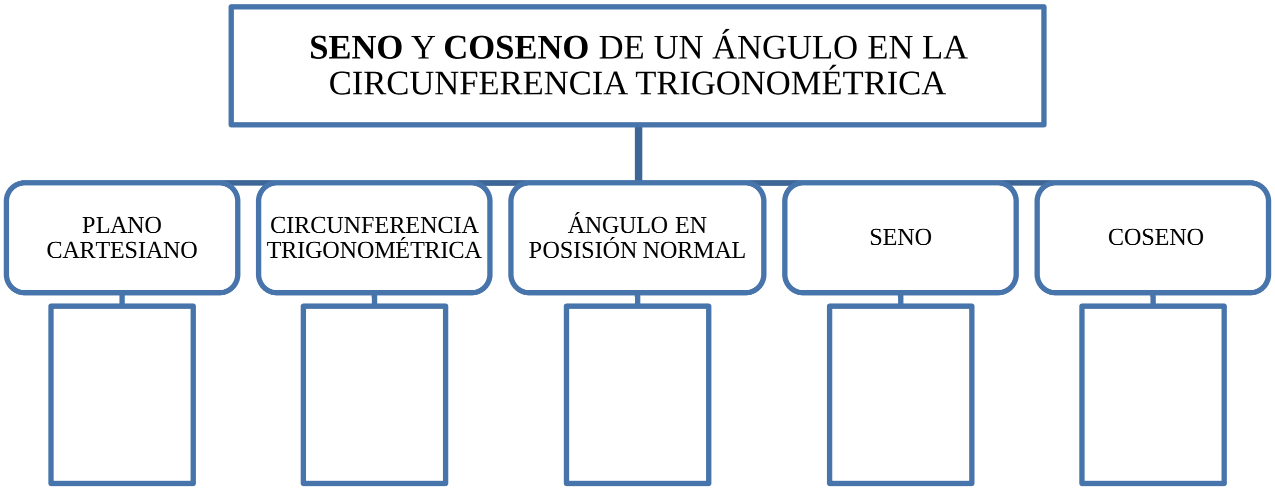
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Sea α un ángulo que está en posición normal y el punto P ($x;y$) un punto cualquiera del segundo lado de α; entonces el seno de α es el cociente de y_p y el segmento OP. El coseno será el cociente entre x_p y el segmento OP.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
$sen\alpha = \dfrac{y_p}{\overline{OP}}$	
$cos\alpha = \dfrac{x_p}{\overline{OP}}$	

Cierre (15 min.)

- Los estudiantes hacen un mapa conceptual resumiendo los puntos más importantes de toda la sesión.



V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Estudiar el tema tratado durante la clase.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Regla
- Transportador
- Lápiz y borrador.
- Fotocopias

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

“Razones trigonométricas”

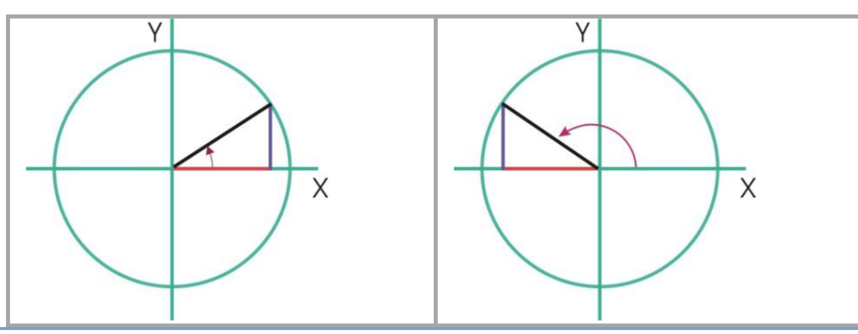
III. APRENDIZAJES ESPERADOS

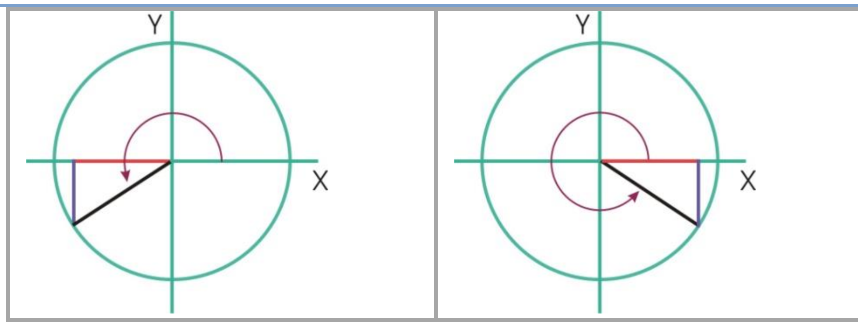
COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Identifica los ángulos coterminales.
	Elabora y usa estrategias	- Resuelve ejercicios aplicando la definición de la tangente y la cotangente.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Relaciona los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentra el lado final de ángulo en posición normal.

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (15 min.)

- El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea.
- El docente presenta una lámina y dialoga con los estudiantes sobre la circunferencia trigonométrica, los ángulos orientados, el seno y el coseno. Para esto se proponen a los estudiantes las siguientes preguntas:





- ✓ ¿Cómo llamamos la línea curva representada en celeste?
- ✓ ¿Cuáles características tiene?
- ✓ El ángulo α, ¿es positivo o negativo? ¿Por qué?
- ✓ Por su definición, ¿cuál es el seno del ángulo α?
- ✓ Por su definición, ¿cuál es el coseno del ángulo α?
- ✓ ¿El seno y el coseno tienen el mismo signo en todos los cuadrantes?

- El docente invita los alumnos a participar al dialogo solicitando la intervención de todos los integrantes del salón.
- Para introducir el tema de clase el docente genera un conflicto cognitivo con la siguiente pregunta:

  ¿El seno de 380º es igual al seno de 20º?
- Los estudiantes dialogan entre ellos y dan sus respuestas según sus pareceres, que el docente anota en la pizarra y que serán corregidas durante la clase.
-

Desarrollo (60min.)

- Luego del intercambio de ideas, el docente presenta el tema.
- Los signos de las razones trigonométricas de un ángulo α dependen únicamente de los signos de las coordenadas del punto P, asociados a dicho ángulo α, es decir de los signos de las coordenadas de un punto cualquiera de lado final del ángulo.

	Sen α	*Cos α*
I cuadrante	+	+
II cuadrante	+	-
III cuadrante	-	-
IV cuadrante	-	+

- Luego de explicar los signos del seno y del coseno, el docente pasa a explicar la variación del seno y del coseno en los cuatro cuadrantes.

- El docente hace las siguientes preguntas:

  ¿Existen ángulos mayores de 360°?

  ¿Qué pasa a las razones trigonométricas de un ángulo si este es mayor de 360°?

  ¿Cómo se calcula las razones trigonométricas de aquellos ángulos que son mayores de una vuelta?

• A partir de estas preguntas el docente explica los ángulos coterminales.

LOS ÁNGULOS COTERMINALES

Los ángulos coterminales son aquellos ángulos en posición normal que tiene el mismo vértice, el mismo lado inicial y el mismo lado final; solo se diferencian en su medida. Si α y β son ángulos coterminales, se cumple que: $RT_{(\alpha)} = RT_{(\beta)}$

Ejemplo:
$\alpha=135^{o}$
$\beta=360^{o} + 135^{o} = 495^{o}$
como 135º y 495º son ángulos coterminales, entonces

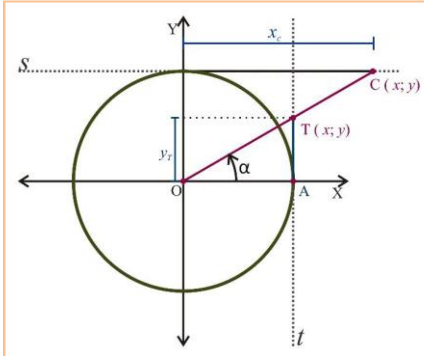
- $sen135^{o} = sen\ 495^{o}$
- $cos\ 135^{o} = cos\ 495^{o}$

Si α y β son dos ángulos coterminales, se cumple que $\beta - \alpha = 360^{o} \times n$, donde n representa al número de vueltas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICOS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y OPUESTOS.

R.T. de ángulos complementarios	R. T. de ángulos suplementarios	R. T. de ángulos opuestos
Dos ángulos, α y β, son complementarios si su suma es 90º, es decir, si $\alpha + \beta = 90^{o}$ Entonces tenemos: ▪ $sen(90^{o} -\alpha) = cos\alpha$ ▪ $cos(90^{o} - \alpha) = sen\alpha$	Dos ángulos,αy β, son suplementarios si su suma es 180º, es decir, si α y β =180º Entonces tenemos: ▪ $sen(180 - \alpha) = sen\alpha$ ▪ $cos(180^{o} - \alpha) = -cos\alpha$	El opuesto de un ángulo α es otro ángulo que tiene la misma amplitud, pero que se genera por una rotación en sentido horario. Se denota por $-\alpha$. Si α y $-\alpha$ son dos ángulos opuestos, se cumple que: ▪ $sen(-\alpha) = - sen\alpha$ ▪ $cos(-\alpha) = cos\alpha$

• El docente da la definición de tangente y de cotangente



TANGENTE

La tangente de un ángulo orientado $\boldsymbol{\alpha}$, en posición normal, es la ordenada del punto T, intersección entre el segundo lado de α,$\overline{OT}$,y la recta tangente a la circunferencia trigonométrica perpendicular al eje de las abscisas (TA).

tgα **= TA**

- En una circunferencia diferente a la circunferencia trigonométrica, tangente de α es la ordenada del punto T entre el radio.

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{TA}}{r}$$

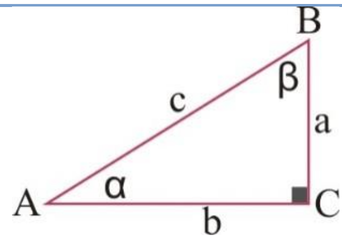
COTANGENTE

La cotangente de un ángulo orientado α, en posición normal, es la abscisa del punto T, intersección entre el segundo lado de α $\overline{OT}$ y la recta tangente a la circunferencia trigonométrica perpendicular al eje de las ordenadas.

- En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de sus ángulos agudos corresponde a la razón que se establece entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al mismo.

$$\boldsymbol{tg\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

- La cotangente es la razón inversa de la tangente. Es decir que en un triángulo rectángulo, definimos la cotangente de uno de sus ángulos agudos como la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.

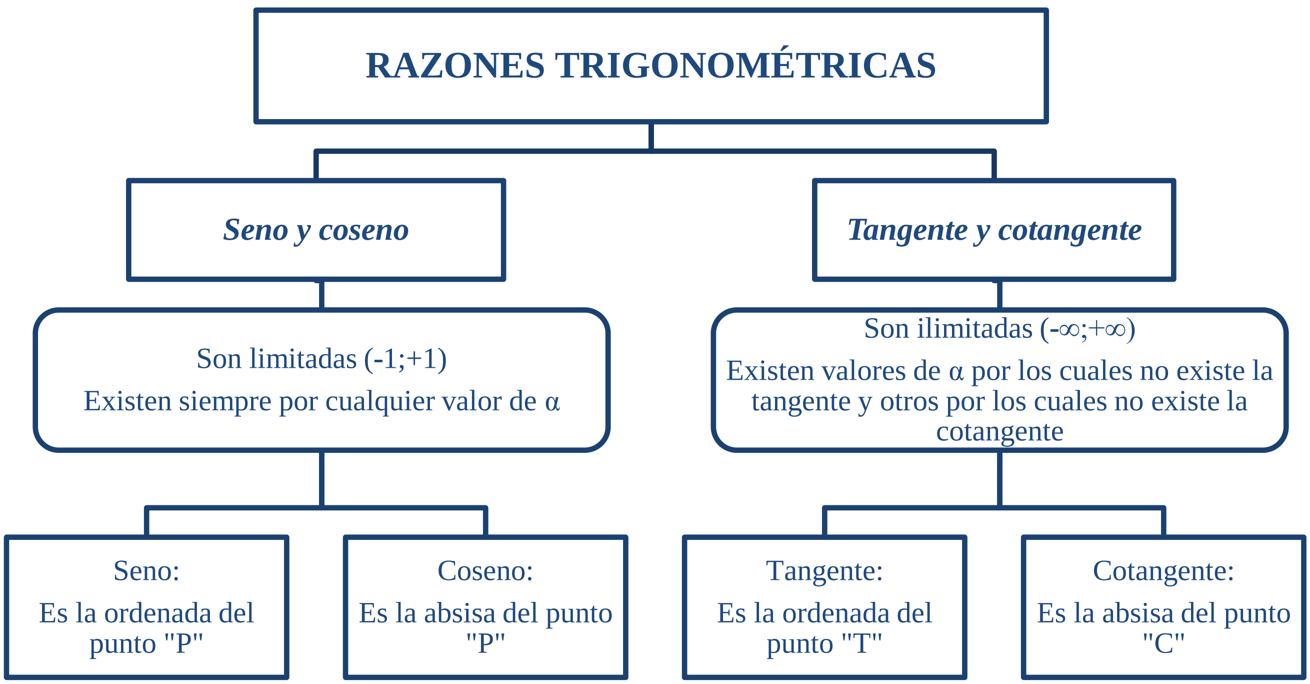


$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

- El docente junto con los estudiantes resuelve los ejercicios 3 y 6 de la página 40 y 41 del texto de trabajo “el aprendiz topógrafo”.

Cierre (15 min.)

- Se reúnen las nociones de las razones trigonométricas en un organizador visual:



V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 4 y 7, del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Lápiz y borrador

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

"Midiendo alturas con el clinómetro"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Resuelve problemas que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos, complementarios y suplementarios.
	Elabora y usa estrategias	- Resuelve problemas que involucran las razones trigonométricas
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Interpreta gráficamente las razones trigonométricas. - Relaciona elementos de un triángulo rectángulo con algunas de las razones trigonométricas.

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (10min.)

- El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea de la clase anterior.

Se hace un repaso sobre la clase anterior, sobre todo se resalta la tangente y cotangente en un triángulo rectángulo.

- A continuación el docente menciona la actividad y el propósito de la sesión.
- La actividad consiste en medir la altura del asta de la institución o del techo de la construcción con la ayuda del clinómetro.
- El docente comenta acerca de la actividad:

El topógrafo en su labor se encuentra muchas veces a levantar planos de terrenos, construcciones, monumentos, para diferentes usos. Muchas veces debe calcular medidas horizontales y verticales que no pueden ser tomadas directamente, así debe poner en práctica

sus saberes y su habilidad para poder determinar de forma indirecta las medidas que necesita. En la mayoría de los casos resuelve el problema aplicando las nociones de trigonometría, reduciendo sus problemas a triángulos y aplicando las razones trigonométricas.
El clinómetro, además de ayudar en la medición de la inclinación de un terreno, carretera, canal etc., o del trazo de una determinada inclinación, resulta ser útil también en la medición de alturas de objetos que no se pueden medir de manera directa.
Los topógrafos utilizan instrumentos más precisos como el teodolito para sus mediciones, pero el principio sobre el cual se basan estos instrumentos es el mismo de nuestro clinómetro.
Con este rudimental instrumento podemos medir la altura del mástil de nuestra institución, de la torre campanario de nuestro pueblo, etc.
Para esto debemos poner en práctica nuestros saberes en merito a las razones trigonométricas y en particular a la de la tangente; además debemos emplear toda nuestra habilidad de aprendices topógrafos.

Desarrollo (65min.)

- Para realizar la actividad el docente forma grupos de dos integrantes y entrega sus instrumentos, mientras tanto cada grupo va revisando sus instrumentos para poder trabajar de una forma eficaz.
- El docente invita a salir al patio de la institución educativa a medir las diferentes alturas (altura del asta, altura del techo de la infraestructura, etc.). Para lo cual los estudiantes deben seguir los siguientes pasos:

Pasos para realizar la actividad…

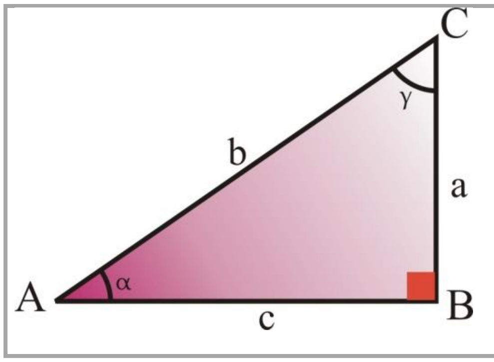
a) Fijar el punto de estación a una distancia determinada de la base del mástil o de cualquier objeto que se desea medir, esta es la distancia horizontal.
b) Cada grupo en su cuaderno de campaña, realiza un croquis del mástil hasta el punto de estación, formando así un triángulo rectángulo.
c) Escoger a un integrante del equipo como el observador, del cual se mide la altura desde los pies hasta los ojos.
d) El observador, una vez ubicado en el punto de estación, mira con el clinómetro la cúspide del asta o de la infraestructura que se desea medir.
e) Otro integrante del grupo lee el ángulo que muestra el clinómetro y lo anota en el cuaderno de campaña.
f) Medir la distancia horizontal, desde la base del mástil hasta el punto de estación.
g) Para realizar el cálculo ubicar los datos obtenidos en el triángulo, de esta manera obtener un triángulo rectángulo, del cual se conoce el ángulo y su lado adyacente; para calcular la altura del triángulo es necesario desarrollar la siguiente operación:

Altura = lado adyacente al ángulo x $tg\alpha$.

h) Para determinar la altura del asta, se suma la altura del observador, obtenido en el paso anterior, a la altura del triángulo. Otra forma de calcular la altura del asta es la siguiente:

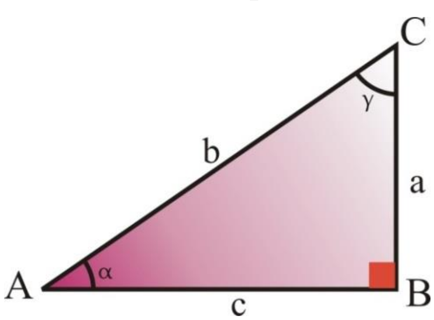
altura del asta = altura de los ojos del observador + distancia horizontal x $tg\alpha$.

- El docente para precisar y despejar las dudas de los estudiantes, da a conocer las razones trigonométricas de ángulos agudos a partir del siguiente triángulo rectángulo.



Razones trigonométricas de ángulos agudos	
$sen\alpha = \frac{a}{b}$	$ctg\alpha = \frac{b}{a}$
$cos\alpha = \frac{b}{c}$	$sec\alpha = \frac{c}{b}$
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$csec\alpha = \frac{c}{a}$

- Luego de explicar las razones trigonométricas, se muestra la figura y se hace la siguiente observación:
-
  - **Se observa que:**



a = c x ***senα*** **= c** x ***cosα***

- Entonces decimos que, α y β son ángulos complementarios por construcción. El seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

Ángulo / Razón	α	(90º - α)
sen	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$
cos	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{b}$
tg	$\frac{a}{c}$	$\frac{c}{a}$
ctg	$\frac{c}{a}$	$\frac{a}{c}$

Cierre (15 min.)

- El docente pide a los estudiantes completar el siguiente cuadro.

Ángulo / Razón	*0º*	*60º*	*45º*	*37º*	*53º*
sen					
cos					
tg					
ctg					

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 2, 4, 6, 7 y 10

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Clinómetro
- Huincha, lápiz y borrador.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"Resolución de triángulos rectángulos"

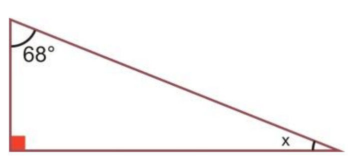
III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Comunica y representa ideas matemáticas	- Determina el ángulo que corresponde a su razón trigonométrica
	Elabora y usa estrategias	- Resuelve problemas de triángulos rectángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (15 min.)

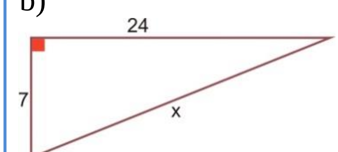
- El docente saluda a los estudiantes y revisa la tarea de la clase anterior.
- Se presenta el nombre y el propósito de la unidad. Para ello muestra la siguiente lámina con la finalidad de recoger los saberes previos de los estudiantes.

En cada caso calcular el valor de x.

a)



b)



- El docente ayuda haciendo las siguientes preguntas:
  ¿Es posible encontrar el valor de los lados faltantes en el triángulo a?
  ¿Es posible encontrar el valor de los ángulos faltantes en el triángulo b?
  ¿Qué métodos utilizamos para calcular los elementos faltantes de los dos triángulos?

- El docente crea un conflicto cognitivo con la siguiente pregunta:

¿En qué consiste resolver un triángulo rectángulo?

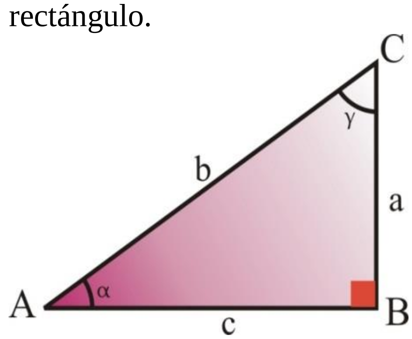
- El docente hace participar activamente a los estudiantes haciendo preguntas.

Desarrollo (60min.)

- Se presenta el tema.

Resolver un triángulo rectángulo es hallar las medidas de sus dos ángulos agudos y las longitudes de sus tres lados, a partir de algunos de sus elementos conocidos.

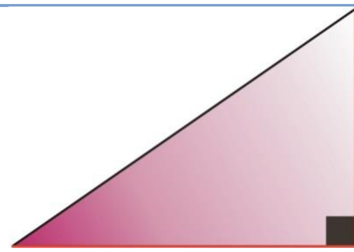
- Para abordar este proceso, el docente resalta la importancia de identificar y nombrar los elementos de un triángulo rectángulo.



- A y C son ángulos agudos y sus medidas son α y γ.
- El ángulo B es recto.
- Las medidas de los catetos se nombran **a** y **c**, mientras que **b** denota la medida de la hipotenusa.

- El docente comenta que no es suficiente aplicar Pitágoras para determinar los lados y los ángulos de los triángulos porque, si faltan dos lados del triángulo, no se puede aplicar Pitágoras y más aun con este teorema no se pueden descubrir los ángulos. Por ello para poder desarrollar el ejercicio por lo menos se deben conocer dos lados o un lado y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo; para así poder trabajar con las razones trigonométricas.

  - ***Conociendo dos lados:***

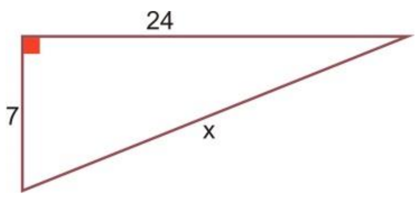


- ✓ Si se conocen dos lados de un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras, se puede calcular el lado desconocido.
- ✓ La amplitud de los ángulos agudos se determina aplicando la definición del seno y el coseno.

$sen\alpha$ y $sen\beta$

Ejemplo:

Resolver el siguiente triángulo rectángulo:

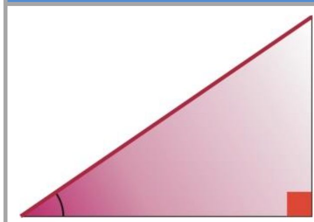
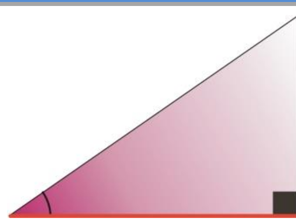
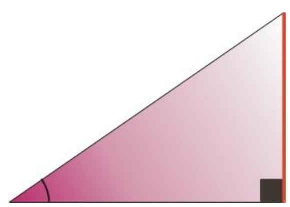


El docente resuelve paso a paso junto con los estudiantes; primero se calcula el lado faltante utilizando el teorema de Pitágoras y luego los ángulos utilizando las razones trigonométricas.

- ➢ *Conociendo un lado y un ángulo agudo:*

Conociendo uno de sus ángulos agudos y uno de sus lados, siempre es posible resolver el triángulo rectángulo.

- El docente indica que hay tres posibles maneras para resolver el triángulo rectángulo.

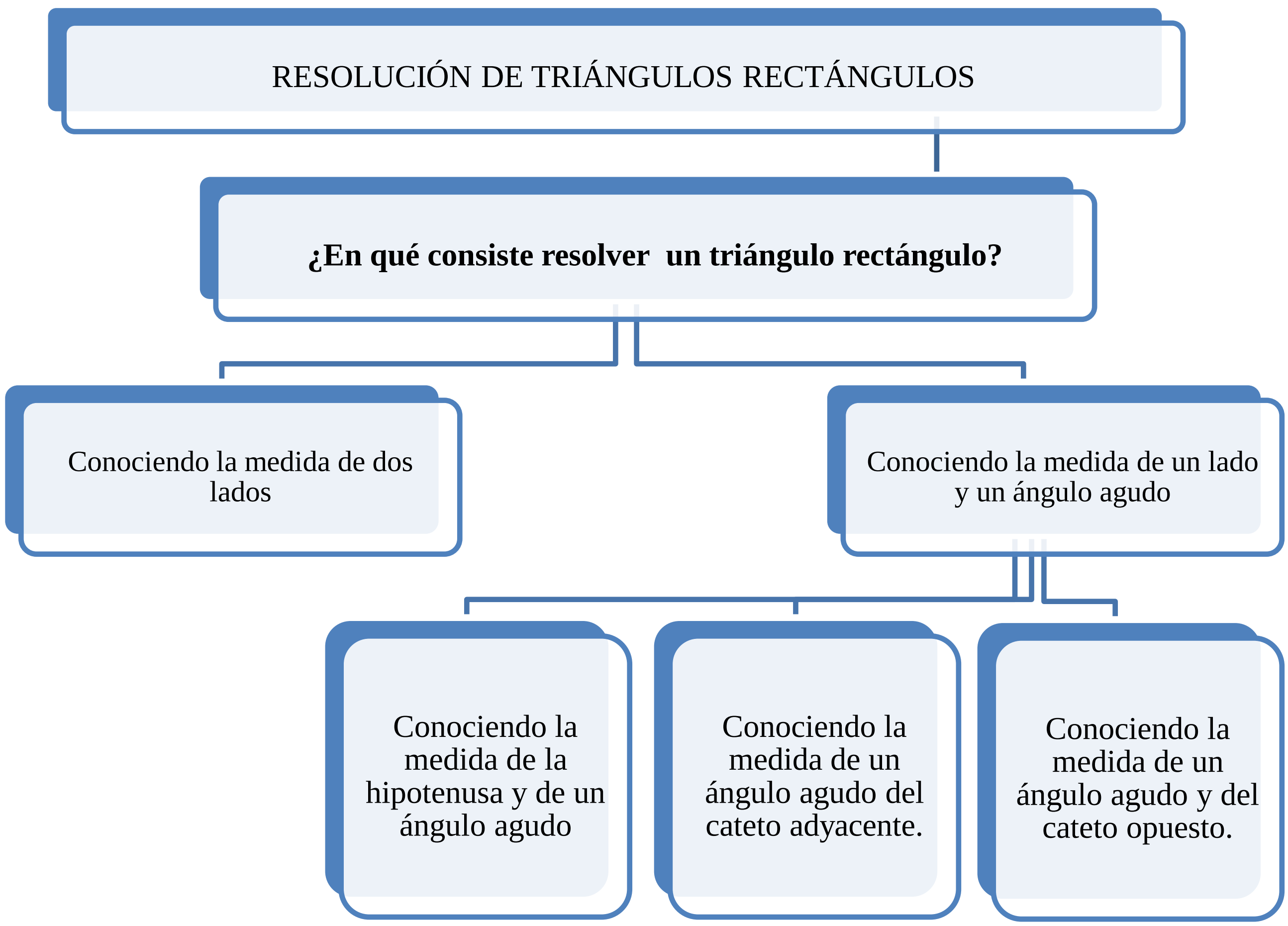
Se conoce la medida de la hipotenusa y de un ángulo agudo.	**Se conoce la medida de un ángulo agudo y del cateto adyacente.**	**Se conoce la medida de un ángulo agudo del cateto opuesto.**
		

- El docente forma grupos de tres o cuatro estudiantes y les indica los ejercicios, del cuaderno de trabajo "El Aprendiz topógrafo".

- Cada grupo resuelve en un tiempo determinado y luego un integrante por grupo sale a la pizarra y explica el procedimiento del desarrollo.

Cierre (15 min.)

- Se propone a los estudiantes plantearse en parejas un ejercicio donde deben hallar los lados y ángulos faltantes de un triángulo rectángulo.
- El docente pide a los estudiantes que organicen en un esquema el tema tratado.



V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 8, 11, 14 y 16.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo "El aprendiz topógrafo"

- Lápiz y borrador

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES		
1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN
"Midiendo la distancia horizontal"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Identifica razones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Discrimina entre ángulo de elevación y ángulo de depresión

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA
Inicio (10 min.)
• El docente da la bienvenida a los estudiantes y revisa la tarea de la clase anterior. • Junto a los alumnos resuelve el ejercicio n° 8 a la página 45 del cuaderno de trabajo "El aprendiz topografo". • Al resolver el ejercicio el docente conduce a los alumnos en un repaso general de la noción de razones trigonométricas de ángulos agudos. ¿Cuál es la cracterística de un triángulo rectángulo? ¿Cómo se definen el seno, el coseno, la tangente y la cotangente en un triángulo rectángulo? ¿En qué consiste resolver un triángulo rectángulo?
Desarrollo (60min.)
• El docente informa sobre el propósito de la sesión, la actividad que se va a realizar y los materiales que se van a utilizar:

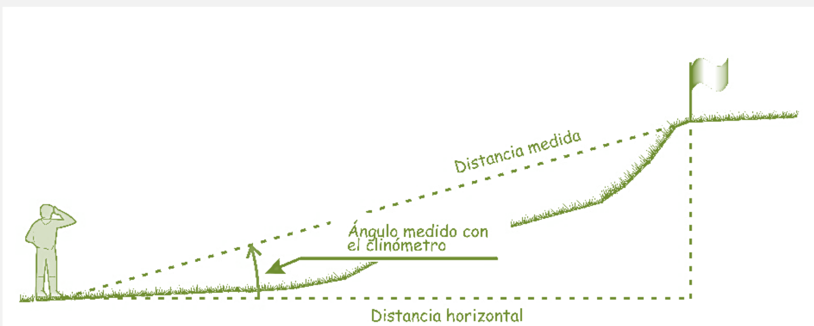
- La actividad consiste en calcular la distancia horizontal entre dos puntos desnivelados del patio de la institución educativa, para lo cual el docente forma grupos de cuatro integrantes y les comenta a cerca de la actividad:

> *Los topógrafos utilizan las definiciones de seno y coseno para resolver triángulos rectángulos y así calcular distancias y alturas que no se pueden medir de forma directa. Por ejemplo para reproducir en un plano un terreno muy accidentado y con fuertes desniveles se hace necesario aplicar las definiciones de seno y coseno, las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos para estimar las distancia horizontales que es imposible medir directamente.*

- Con la indicación del docente cada grupo alista su instrumento de trabajo (el clinómetro, la mira y una huincha), y salen al patio de la institución.
- El docente explica y da las indicaciones paso a paso para realizar la actividad.

Pasos para seguir la actividad…

a) Determinar el terreno del cual se desea medir la distancia horizontal.
b) Realizar en el cuaderno de campaña un diseño del terreno, como se indica en la siguiente gráfica:



c) Graduar la varilla a la altura de los ojos del observador.
d) Ubicar los puntos; en el primer punto se ubica el observador con el clinómetro casero y en el segundo punto se posiciona la varilla.
e) El observador con el clinómetro apunta la parte superior y central dela varilla, mientras el ayudante lee el ángulo que este indica y anota en el cuaderno de campaña.
f) Se mide la distancia entre el primer punto y segundo punto.
g) Ubicar los datos obtenidos en el croquis, obteniendo de esta manera un triángulo rectángulo con los siguientes datos, hipotenusa y el ángulo adyacente a la distancia horizontal.
h) Para estimar la línea horizontal, hacemos la siguiente operación:

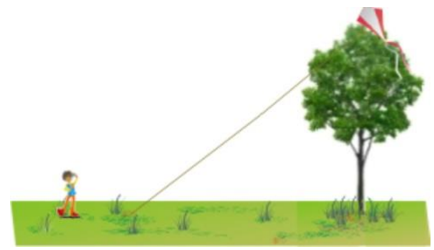
D. Horizontal = *cosα* x *hipotenusa*

i) En el salón, cada grupo representa gráficamente la actividad realizada.

Cierre (20 min.)

- El docente presenta una situación donde se hará uso de otras razones trigonométricas además del coseno.

Una cometa se queda atascada en la rama más alta de un árbol. Si la cuerda que la sostiene mide 20m y forma un ángulo de 35° con el suelo, calcula la altura del árbol.



- Los estudiantes resuelven en equipo la situación planteada haciendo uso de estrategias diversas.
- El docente hace énfasis en la utilización de las razones trigonométricas inversas
- El docente llega a las siguientes conclusiones:
  - las razones trigonométricas permiten resolver un triángulo conociendo uno de sus ángulos agudos y uno de sus lados.
  - existen muchos caminos para resolver problemas haciendo uso de las RT, las razones inversas es una posibilidad.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 9, 10, 15, 12 y 13 del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”, página 45.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Clinómetro
- Huincha
- Cuaderno de campaña, lápiz y borrador.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

“ Resolución de triángulos oblicuángulos ”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

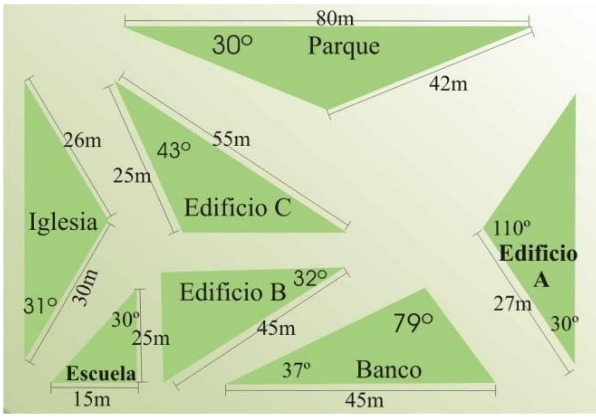
COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	- Conoce algebraicamente y gráficamente el teorema del seno.
	Comunica y representa ideas matemáticas	- Aplica las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la resolución de problemas y ejercicios - Aplica el teorema del seno en resolución de ejercicios y problemas - Aplica el teorema del coseno en la resolución de ejercicios y problemas
	Elabora y usa estrategias	- Plantea y resuelve problemas aplicando la ley cosenos. - Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Interpreta gráficamente problemas relacionados a triángulos oblicuángulos - Relaciona los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (15 min.)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes, menciona el título de y el propósito la sesión.
- Se organizan los estudiantes formando grupos de cuatro integrantes y el docente entrega a cada grupo una fotocopia, en la cual se muestra un plano de una pequeña ciudad donde hay edificios, un banco, una iglesia, una escuela y un parque. Este mismo plano se presenta en una lámina expuesta en

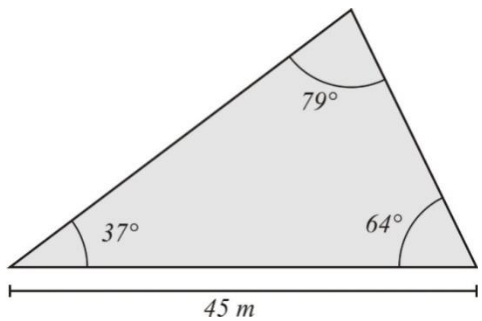
la pizarra.



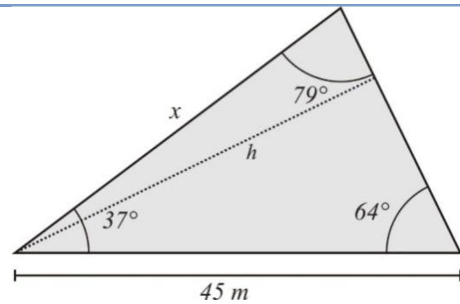
- El docente plantea el siguiente problema:
  - ¿cómo puedo calcular el perímetro del banco?
  - ¿qué figura geométrica representa el parque?
  - ¿cuáles elementos debemos conocer para calcular el perímetro? ¿Los tenemos todos?
  - ¿cómo calculamos el lado que no conocemos?
- Cada grupo tiene aproximadamente 10 minutos para elaborar una estrategia que permita determinar lo que pide el problema, a partir de los datos conocidos.

Desarrollo (60min.)

- Los alumnos presentan sus ideas sobre cómo resolver el problema.
- Para dar un panorama sobre la resolución de triángulos oblicuángulos y presentar el tema, el docente presenta su propia estrategia explicandola paso a paso:
  - ❖ La suma de los ángulos internos del triángulo es 180°, por tal razón el ángulo desconocido mide 64°



  - ❖ Trazo la altura respecto a uno de los lados desconocidos.



❖ De esta manera formo dos triángulos rectángulos con un cateto en común, “*h*”. Aplicando la razón trigonométrica del seno puedo afirmar que:

h = sen 64° x *45*

❖ Al mismo tiempo puedo afirmar que:

h = sen 79° x*x*

❖ De estas dos expresiones puedo afirmar que:

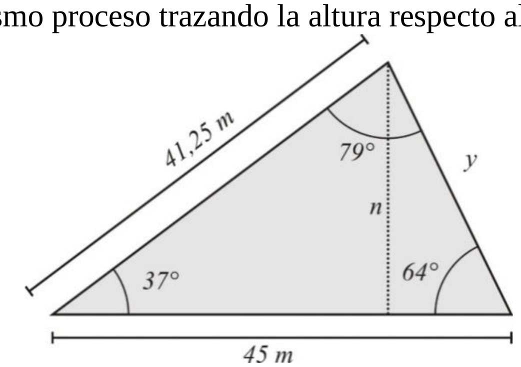
sen 79° x*x = sen 64°* x *45*

$$\frac{sen\ 79°}{45} = \frac{sen\ 64°}{x}$$

$$x = 45 \times \frac{sen\ 64°}{sen\ 79°}$$

x =41,25m

❖ Ahora si repito el mismo proceso trazando la altura respecto al lado de 45 m :



❖ Aplicando la razón trigonométrica del seno puedo afirmar que:

n = sen 37° x *41,25*

❖ Al mismo tiempo puedo afirmar que:

*n = sen 64°*x*y*

❖ De estas dos expresiones puedo afirmar que:

sen 64° x*y = sen 37°*x *41,25*

$$\frac{sen64°}{41,25}=\frac{sen37°}{y}$$

$$y=41,25\times\frac{sen37°}{sen64°}$$

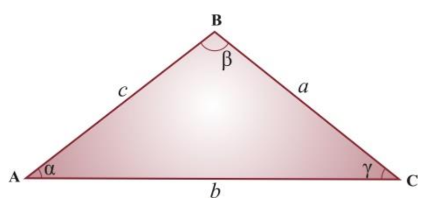
y = 27,55m

- El docente informa que el perímetro del banco es la suma de todos los lados.
- Se empieza a explicar el teorema del seno y luego el teorema del coseno con su respectiva demostración.

EL TEOREMA DEL SENO

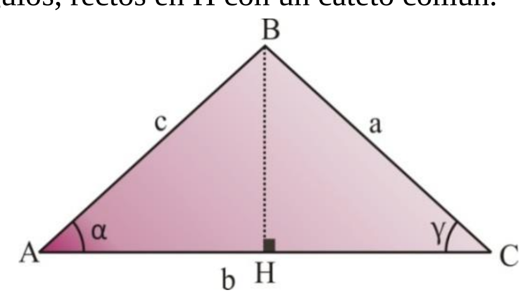
En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Este teorema indica que: dado un triángulo ABC se verifica



- $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$

- El docente junto con los estudiantes deduce el teorema del seno a partir del triángulo anterior.
  - ❖ Si trazamos la altura respecto al lado *b* se obtiene el segmento BH. Esto divide el triángulo en dos triángulos rectángulos, rectos en H con un cateto común.



  - ❖ Aplicando la definición de seno en el triángulo AHB obtenemos:

$sen\alpha=\frac{BH}{c}$ entonces $\overline{\overline{BH}}$= $sen\alpha\times c$......(1)

  - ❖ De la misma manera del triángulo BHC obtenemos:

$sen\gamma = \frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{a}}$ entonces BH= $sen\gamma \times a$……(2)

- Siendo BH el cateto común, de las formulas 1 y 2 se puede deducir que:

$sen\alpha \times c = sen\gamma \times a$………………(3)

Entonces:

$$\frac{\mathbf{a}}{\boldsymbol{sen\alpha}} = \frac{\mathbf{c}}{\boldsymbol{sen\gamma}} \ldots\ldots\ldots(4)$$

- El docente resalta que, para aplicar el teorema del seno exige conocer tres de sus elementos, *¿Cuáles serían?*

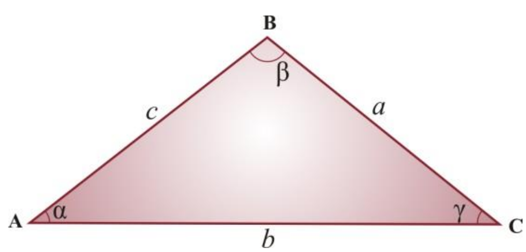
Serían:

- Dos ángulos y uno de los lados no comprendidos por estos ángulos.
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Luego de demostrar el teorema del seno, el docente pasa a explicar el teorema del coseno.

EL TEOREMA DEL COSENO

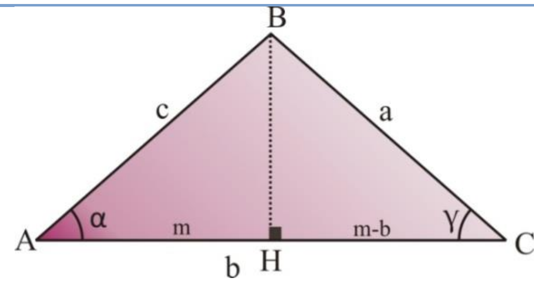
En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos su doble producto por el coseno del ángulo que estos forman.

El teorema del coseno permite resolver triángulos en los que se conocen tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. El teorema indica que dado cualquier triángulo ABC, se cumple que:



- $a^2 = b^2 + c^2$ - 2bc x cosA
- $b^2 = a^2 + c^2$ – 2ac x cosB
- $c^2 = a^2 + b^2$ – 2ab x cosC

- El docente junto con los estudiantes deduce el teorema del coseno.
  - Trazamos la altura respecto al lado b, obteniendo así dos triángulos rectángulos, AHB, CHB, con un cateto en común. El lado b resulta dividido en dos segmentos, uno de estos lo llamamos m, el otro será $b - m$.



❖ Por la definición de coseno se sabe que:

$m = c \cdot cos\alpha$

❖ Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHB se puede afirmar que:

$\boldsymbol{BH^2 = c^2 - m^2}$ ………………………………. (1)

❖ Ahora aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHB se puede deducir que:

$BH^2 = a^2 - (b - m)^2 BH^2 = a^2 - (b^2 - 2bm + m^2)$

$BH^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2$ ………………………(2)

❖ Igualando el segundo miembro de la 2 con el segundo miembro de la 1 se obtiene:

$a^2 - b^2 + 2bm - m^2 = c^2 - m^2$

❖ Restando de ambos miembros m^2 y despejando a^2 al primer miembro se obtiene:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$

❖ Por la definición de coseno se sabe que:

$m = c \cdot cos\alpha$

❖ Así que se obtiene la fórmula del teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos\alpha$

❖ El teorema del coseno nos permite resolver todo tipo de triángulo conociendo dos de sus lados y el ángulo que estos forman.

- El docente resalta que, para aplicar el teorema del coseno exige conocer tres de sus elementos, *¿Cuáles serían?*

  Serían:

  - ❖ Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
  - ❖ Sus tres lados.
- Se resuelve el ejercicios del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo” página 51.

Cierre (15 min.)

- Los estudiantes organizan en un mapa de ideas el tema tratado.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios 1, 2, 5, 6 y 8 del cuaderno de trabajo el Aprendiz topógrafo" página 50.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo "El aprendiz topógrafo"
- Plumones
- Lápiz y borrador.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:"SANTA ROSA" Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

"Levantamiento de un plano"

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Comunica y representa ideas matemáticas	- Analiza y resuelve representaciones gráficas que involucran la aplicación del teorema del seno y del coseno
	Elabora y usa estrategias	- Resuelve triángulos a partir de condiciones dadas como datos - Calcula los lados y ángulos de triángulo oblicuángulo - Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos, obtusángulos y acutángulos
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Plantea y resuelve problemas aplicando la ley de senos - Evalúa las condiciones de un problema para ejecutar procedimientos relacionados con la ley del seno

IV. SECUENCIADIDÁCTICA

Inicio (10min.)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y revisa la tarea de la clase anterior.
- Se hace un repaso de manera general los contenidos tratados en la unidad.
  - *¿Qué es el triángulo? ¿Qué características tiene?*
  - *¿Qué es el ángulo? ¿Cuáles son los sistemas de medidas angulares?*
  - *¿Cómo se definen las razones trigonométricas en una circunferencia trigonométrica? ¿Qué es una circunferencia trigonométrica?*
  - *¿Qué significa resolver un triángulo rectángulo?*
  - *¿Cuándo un triángulo es oblicuángulo?*
- El docente recoge las opiniones de los estudiantes despejando las dudas e inquietudes.

Desarrollo (60min.)

- El docente presenta la actividad que se realizará durante la sesión (levantamiento de un plano topográfico).
- Antes de salir al patio, el docente comenta sobre de la actividad.

Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría en la vida del hombre es la topografía que permite la medición de terrenos, el trazo de confines en estos, el monitoreo de movimientos, la realización de construcciones públicas y privadas y permite la representación gráfica del territorio, su relieve, la ubicación en este de elementos significativos etc. Efectivamente la medición y representación de terrenos, necesaria para una infinidad de aplicaciones en la vida del hombre, presenta un problema que sobresale desde un primer acercamiento al tema. No existe un terreno que tenga forma de un polígono conocido. En la realidad aparece evidente que los terrenos presentan formas irregulares, uno diferente de otro y *con una gran variabilidad. Para poder medir estos terrenos es necesario descomponerlos en triángulos y resolver cada uno de ellos; llegando de esta manera a la resolución práctica de un polígono cualquiera.*

- Luego del comentario se sale al patio de la institución educativa a realizar la actividad.
- La actividad consiste en realizar un plano topográfico del patio de la institución educativa.
- para ello los estudiantes deben seguir los siguientes pasos:

Pasos para realizar la actividad…

a) Elaborar un croquis del patio de la institución en el cuaderno de campaña.

b) Fijar un punto fijo con un clavo (debe ser un lugar adecuado para ver todo el perímetro del patio), de donde se hace las mediciones con la huincha, luego se pone otros puntos a los extremos del patio (en el perímetro).

c) Medir las distancias entre el punto fijo y el primer punto establecido en el perímetro, luego entre el punto fijo y el segundo punto establecido en el perímetro, por último, entre el primer y el segundo punto en el perímetro. Formando así un triángulo con los tres lados conocidos.

d) Anotar todos los datos (la medida de los lados), en el cuaderno de campaña.

e) Hacer la misma operación para todos los puntos sucesivos del perímetro del patio.

f) Se observa que, el patio de la institución educativa está descompuesto en varios triángulos, todos con los tres lados conocidos.

g) Representar gráficamente el patio en un plano con todas las medidas respectivas (el perímetro del patio debe ser trazado con una línea continua y los triángulos que en esto se forman se trazan con líneas interrumpidas).

h) Para determinar el área total del patio, primero se calcula el área de cada triángulo y luego se realiza la suma de todas las áreas obtenidas.

- El docente presenta las siguientes preguntas:
  - ¿cómo calculamos el perímetro del patio?
  - ¿cómo podemos calcular el área?
  - el docente reorganiza grupos de trabajo.
- En el salón el docente calcula los ángulos y el área del triángulo.
  - ✓ Conociendo la medida de los tres lados del triángulo, se aplica el teorema del coseno para calcular uno de los ángulos desconocidos. Una vez determinado el valor de $\cos\alpha$, queda simplemente hacer la operación inversa para determinar el valor de α.
  - ✓ Luego se traza la altura respecto a uno de sus lados, la medida de la altura se determina

aplicado la definición de seno el un triángulo rectángulo. Para determinar el área es suficiente aplicar la fórmula resolutiva. Área es igual base por altura entre dos.

- Cada grupo debe calcular el área del patio.
- Los grupos con la ayuda del docente calculan los ángulos y el área de los otros triángulos.
- Luego de calcular los ángulos y el área, se calcula el perímetro (*es nomas sumar la medida de los segmentos de un punto al sucesivo, formados en el perímetro*) y el área (*es la suma de todas las áreas del triángulo*) del patio.
- Los estudiantes con la ayuda del docente calculan los ángulos y el área de los demás triángulos.

Cierre (20 min.)

- Los estudiantes exponen el trabajo realizado.
- Cada grupo explica los procedimientos realizados durante la actividad y los materiales que ha utilizado.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Resolver los ejercicios del cuaderno de trabajo “El aprendiz topógrafo”.

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Manual de trabajo “El aprendiz topógrafo”
- Plumones
- Lápiz y borrador.
- Huincha
- Clavos

- Papelotes
- Colores
- Fotocopias

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS GENERALES

1.1.	UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
1.2.	INSTITUCIÓN EDUCATIVA	:“SANTA ROSA” Uchusquillo
1.3.	ÁREA	:MATEMÁTICA
1.4.	GRADO Y SECCIÓN	:5º ÚNICA
1.5.	FECHA	:12/08/16

Grado: Quinto/ Duración: 2 horas pedagógicas

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

“Demuestro lo que aprendí”

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Matematiza situaciones	Describe los criterios de congruencia y la semejanza de triángulos Identifica y relaciona los diferentes sistemas de medidas angulares Identifica las razones trigonométricas de un ángulo en la circunferencia trigonométrica
	Comunica y representa ideas matemáticas	Aplica el teorema de Pitágoras y teorema de Tales en la resolución de ejercicios
	Elabora y usa estrategias	Resuelve problemas de triángulos rectángulos aplicando la definición de las razones trigonométricas Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos que involucran las leyes de seno, coseno

IV. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (10 min.)

- El docente saluda a los estudiantes y da las indicaciones necesarias para el examen

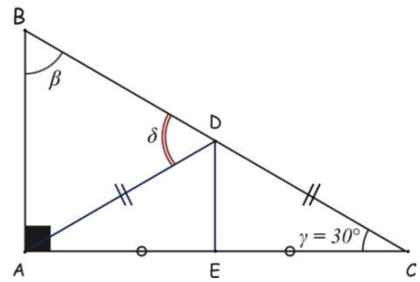
Desarrollo (60min.)

- El docente entrega a los estudiantes el examen e indica la hora de empiezo y la hora de entrega.

Examen de post-test, “El aprendiz topógrafo”

DEMUESTRO LO QUE APRENDÍ

Observa con mucha atención la figura presentada y completa los cuadros propuestos utilizando las propiedades de los triángulos.



Triángulos	Equiláteo	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
▲ABC						
▲ADE						
▲ADC						
▲ABD						

Marca con una ✗ las características que corresponden a cada triángulo

ESTABLECE LAS RELACIONES ENTRE LAS SIGUIENTES PAREJAS DE TRIÁNGULOS			
TRIÁNGULOS	DIFERENTES	SEMEJANTES	CONGRUENTES
▲ABC ;▲ABD			
▲ABC ;▲ED			
▲ADE ;▲CDE			
▲ADC ;▲ABD			

Marca con una ✗ la relación que existe entre cada pareja de triángulos

APLICANDO OPORTUNAMENTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS O EL DE THALES COMPLETA EL CUADRO			
TRIÁNGULOS	DATO 1	DATO 2	DATO A BUSCAR
▲ABC	BC= 12 cm	AB=cm	AC=?
▲EDC	ED= 3 cm		DC=?

Escribe la formula general y luego calcula el dato que te pide el cuadro

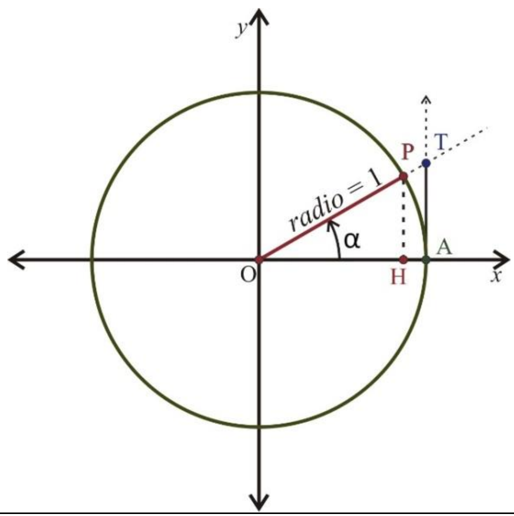
COMPLETA LA TABLA APLICANDO LASPROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS Y LAS FORMULAS DE CONVERSIONES		
Sexagesimal	Radial	Centesimal
γ=30°	γ=	γ=

β=	β=	β=
δ=	δ=	δ=

EXPLORAMOS NUESTROS SABERES TRIGONOMÉTRICOS

Observa la imagen y completa el cuadro

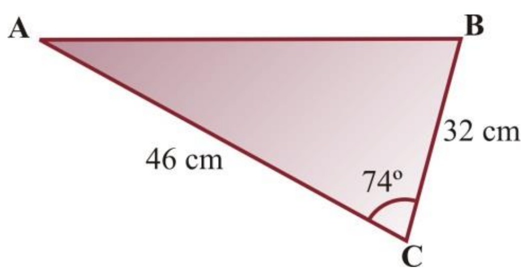
OBSERVA LA FIGURA Y MARCA CON UNA χ EL SEGMENTO QUE CORRESPONDE A CADA UNA DE LAS MAGNITUDES TRIGONOMÉTRICA



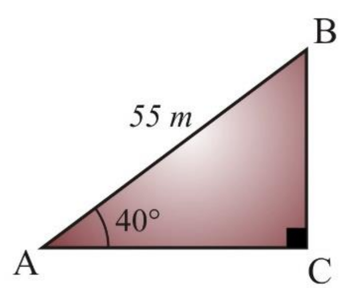
	PH	TA	OH	OA
sen α				
cos α				
tg α				
cotg α				

Aplicando las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, las leyes del seno y del coseno, calcula la longitud de todos los lados y la amplitud de todos los ángulos de los siguientes triángulos.

a)



b)



- Al finalizar el tiempo establecido, el docente recoge los exámenes.
- En este último tiempo, cada grupo presenta el producto final de la unidad.

Cierre (20min.)

- Los grupos exponen su producto.

V. TAREA A TRABAJAR EN CASA

VI. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- Fotocopias
- Hojas blancas para desarrollar el examen.